

# 一般表载作用下的层状弹性系统的变形

潘 尔 年

(水利水电科学研究院)

1988年11月12日收到

## 摘 要

本文提出了一种适应于求解多层各向同性弹性静力学问题的一般的且简洁的处理方法——即基于笛卡尔坐标与柱坐标两组向量函数系的传播矩阵法，从而避免了此类问题研究中的复杂性。在两向量函数系下分别得到了在一般表载作用下介质内任意点处的位移及应力分量的解析表达式。文中给出的算例既证实了所列公式的正确性，又表明：在数字积分中结合改进的 Padé 近似求和法后，本文所提出的方法是非常简单且易于实际应用的。

## 一、引 言

层状弹性介质的静力学问题在土木工程<sup>[1]-[3]</sup>及地球科学<sup>[4]</sup>中皆有对应的物理模型，因而对其进行深入的研究有着不可低估的价值。

就作者所知，因其问题的复杂性，仅仅某些特殊形式的表载及较少层数弹性系统的问题曾得到过较深入的研究<sup>[5]、[6]</sup>，这在文[1]—[3]中都给出过较详细的评述。近年来，文[2]及[3]对轴对称表载用 Hankel 变换、一般表载用单（对应二维问题）或双重（对应三维问题）Fourier 变换法，并结合有限层技术（*finite layer techniques*）对多层弹性介质的任意表载作用问题给予了较详细的讨论，并且对一些典型情况给出了数字及图表结果，将此类问题的求解向前推进了一大步。但就作者来看，其处理有几点不足：1）因使用的是柔度矩阵，故需解一与层数成正比的联立线性方程组。而且若要计算某层内部的物理量，还需再将此层子分，这样，一般要解一阶数较高的线性方程组；2）Hankel 变换法只能用来求解轴对称表载问题，即使对工程上很有意义的、圆形域上的均布水平载问题亦不易处理<sup>[7]</sup>；3）对一般三维变形问题，用直接的双重 Fourier 变换后，还需引入辅助坐标变换及辅助变量才可最后求解，这样一来，无疑增加了问题的复杂性。文[8]对层状介质问题亦用直接的双重 Fourier 变换法，但精确地求得了每层中的传播矩阵，因而避免了文[2]及[3]中的第 1）点不足。文[9]以柱向量函数系为基，利用传播矩阵方法对一般表载及体力作用下的层状弹性介质问题给予了较详细的讨论，使得只需简单的矩阵乘便可得到介质内任意

点处物理量的系数。文〔9〕还对圆形域上均布垂直、水平力等典型问题作过数字计算。并且将加速级数收敛法引入数字积分中以加快计算速度及计算精度。但反过来,即使对很简单的均布条形、矩形载荷问题,在柱向量函数系下亦不易处理。

本文将笛卡尔向量函数系及柱向量函数系同时引入,在此两组向量函数系下同时推导出了每层中的通解、传播矩阵及介质在一般表载作用下其内部任意点处的位移及应力分量表达式(对体力非零情形处理类似。但因篇幅所限,本文将不予讨论,有兴趣的读者可参见文〔9〕)。由于我们适当地选取了两组向量函数系(这里的柱向量函数系与文〔9〕中的稍有差异),使得在两向量函数系下能推导出相同形式的通解表达式及完全一样的传播矩阵。另外,本文使用了笛卡尔向量函数系代替直接的双重 Fourier 变换,从而避免了直接 Fourier 变换法中辅助变量及辅助坐标变换的引入。因为在两向量函数系下的结果表达式非常类似,特别是其传播矩阵完全一样,这不仅使我们能对以前研究过的一些典型表载问题分别选用笛卡尔或柱向量函数系去很方便地处理,而且可以预料,此法还可用于处理一大类更复杂的有工程意义的表载和体力作用问题。

## 二、在两组向量函数系下的解

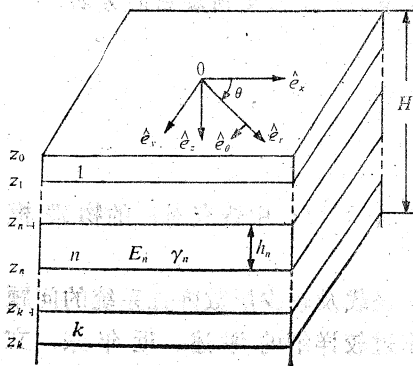


图 1 坐标系及各层参数示意图

如图 1 所示,假定我们所要处理的地基是由 \$k+1\$ 个各向同性的弹性均匀层(包括均匀的半无限空间)组成的;层与层之间的连续性条件为简化起见取为固接。坐标原点选在最上一层的表面,且选取图示的两组坐标系,即笛卡尔与柱坐标系。在此情形下,对任一层(如第 \$n\$ 层),当无体力作用时皆有如下弹性静力学平衡方程

$$\text{grad div } \vec{u}_n - \frac{(1-2\nu_n)}{2(1-\nu_n)} \text{rot rot } \vec{u}_n = 0 \quad (2.1)$$

对此方程及其对应的边界条件,我们将在如下两组向量函数系〔10〕下求解:

### 1. 笛卡尔向量函数系(为简化书写,函数对参变量的依赖性将不予表出)

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{L}(x, y) &= \hat{e}_z S(x, y) \\ \vec{M}(x, y) &= \text{grad} S(x, y) = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} S + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} S \\ \vec{N}(x, y) &= \text{rot}[\hat{e}_z S(x, y)] = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial y} S - \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial x} S \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

方程(2.2)中,标量函数

$$S(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-i(ax + \beta y)] \quad (2.3)$$

满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} S + \frac{\partial^2}{\partial y^2} S + \lambda^2 S = 0$$

其中

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

## 2. 柱向量函数系

$$\begin{cases} \vec{L}(r, \theta) = \hat{e}_z S(r, \theta) \\ \vec{M}(r, \theta) = \text{grad} S(r, \theta) = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} S + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} S \\ \vec{N}(r, \theta) = \text{rot}[\hat{e}_z S(r, \theta)] = \frac{\hat{e}_r}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} S - \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} S \end{cases} \quad (2.4)$$

方程(2.4)中, 标量函数

$$S(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_m(\lambda r) e^{im\theta} \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5)$$

满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} S + \frac{\partial}{r \partial r} S + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} S + \lambda^2 S = 0$$

其中,  $J_m(\lambda r)$  为  $m$  阶 Bessel 函数。

注意, 我们之所以对两向量函数系下的函数使用相同的符号, 是因为下面一些结论对两向量函数系皆成立。

首先容易推出, 对任意连续可微函数  $f(z)$ , 有下述关系式成立

$$\begin{cases} \text{div}(f(z)\vec{L}) = f'(z)S \\ \text{div}(f(z)\vec{M}) = -\lambda^2 f(z)S \\ \text{div}(f(z)\vec{N}) = 0 \\ \text{rot}(f(z)\vec{L}) = f(z)\vec{N} \\ \text{rot}(f(z)\vec{M}) = -f'(z)\vec{N} \\ \text{rot}(f(z)\vec{N}) = f'(z)\vec{M} + \lambda^2 f(z)\vec{L} \end{cases}$$

这里,  $f'(z) \equiv df/dz$ 。其次, 利用此组关系式则不难证明, 下面三向量函数为平衡方程(2.1)之三线性独立解。

$$\begin{cases} e^{\pm \lambda z} [\pm \vec{L} + \frac{1}{\lambda} \vec{M}] \\ e^{\pm \lambda z} [(\pm 1 - 2\delta_n \lambda z) \vec{L} - \frac{1}{\lambda} (1 \pm 2\delta_n \lambda z) \vec{M}] \\ e^{\pm \lambda z} \vec{N} \end{cases} \quad (2.6)$$

其中,  $\delta_n = 1/(3 - 4\nu_n)$ 。

方程 (2.1) 之通解即独立解 (2.6) 的线性组合, 将此位移通解及由此而推得的面应力向量在向量函数系下表示, 并且关于参变量  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\lambda$  积分、关于  $m$  求和后, 我们便得位移及面应力向量解的一般表达式。它们在笛卡尔向量函数系下为

$$\vec{u}_n(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [U_L(z) \vec{L}(x, y) + U_M(z) \vec{M}(x, y) + U_N(z) \vec{N}(x, y)] d\alpha d\beta \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{T}_n(x, y, z) &\equiv \sigma_{xz}^n \hat{e}_x + \sigma_{yz}^n \hat{e}_y + \sigma_{zz}^n \hat{e}_z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [T_L(z) \vec{L}(x, y) + T_M(z) \vec{M}(x, y) + T_N(z) \vec{N}(x, y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (2.8)$$

在柱向量函数系下为

$$\vec{u}_n(r, \theta, z) = \sum_m \int_0^{+\infty} [U_L(z) \vec{L}(r, \theta) + U_M(z) \vec{M}(r, \theta) + U_N(z) \vec{N}(r, \theta)] \lambda d\lambda \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{T}_n(r, \theta, z) &\equiv \sigma_{rz}^n \hat{e}_r + \sigma_{\theta z}^n \hat{e}_\theta + \sigma_{zz}^n \hat{e}_z \\ &= \sum_m \int_0^{+\infty} [T_L(z) \vec{L}(r, \theta) + T_M(z) \vec{M}(r, \theta) + T_N(z) \vec{N}(r, \theta)] \lambda d\lambda \end{aligned} \quad (2.10)$$

在方程 (2.7) — (2.10) 中,  $U_L(z)$ 、 $U_M(z)$ 、 $U_N(z)$ 、 $T_L(z)$ 、 $T_M(z)$  及  $T_N(z)$  由通解矩阵  $[Z^L(z)]$  及  $[Z(z)]$  给出。若引入两列矩阵

$$[A^L(z)] = (\lambda U_N(z), T_N(z))^T \text{ 及}$$

$$[A(z)] = (U_L(z), \lambda U_M(z), T_L(z)/(2\lambda), T_M(z)/2)^T$$

则它们之间的关系为

$$[A^L(z)] = [Z^L(z)][C^L] \quad (2.11)$$

$$[A(z)] = [Z(z)][C] \quad (2.12)$$

这里,  $[C^L]$  及  $[C]$  分别为  $2 \times 1$  及  $4 \times 1$  常列阵;  $[Z^L(z)]$  及  $[Z(z)]$  分别为  $2 \times 2$  及  $4 \times 4$  方阵, 其元素给在附录 I 中。

由上可见, 解的  $\vec{N}$  分量与  $\vec{L}$  及  $\vec{M}$  分量是相互独立的, 因而可分别加以考虑。而且  $\vec{N}$  之分量表示的解无体积应变;  $\vec{L}$  及  $\vec{M}$  之分量表示的解无  $\hat{e}_z$  向旋度。另外, 与文[9]中的结果比较不难发现, 上面的通解与我们单在柱向量函数系下所得的结果完全一致, 因而我们便可直接利用那里的传播矩阵而不必重新推导了。即有

$$[A^L(z_{n-1})] = [a_n^L][A^L(z_n)] \quad (2.13)$$

$$[A(z_{n-1})] = [a_n][A(z_n)] \quad (2.14)$$

这里

$$[a_n^L] = [Z^L(z_{n-1})][Z^L(z_n)]^{-1} \quad (2.15)$$

$$[a_n] = [Z(z_{n-1})][Z(z_n)]^{-1} \quad (2.16)$$

即传播矩阵，其元素给在附录 II 中。

反复利用传播关系 (2.13)、(2.14) 及层间的连续性条件，则可将最上层上界面及最下层下界面上的位移及面应力向量之系数联系起来，即

$$[A^L(z_0)] = [a_1^L][a_2^L] \cdots [a_k^L][A^L(z_k)] \quad (2.17)$$

$$[A(z_0)] = [a_1][a_2] \cdots [a_k][A(z_k)] \quad (2.18)$$

由此可解得上二式左端及右端的未知量 (详见文 [9])。这样，任意深度  $z$  (假定  $z_{n-1} \leq z \leq z_n$ ) 处的位移及面应力向量之系数可由下式获得

$$[A^L(z)] = [a_n^L(z_n - z)][a_{n+1}^L] \cdots [a_k^L][A^L(z_k)] \quad (2.19)$$

$$[A(z)] = [a_n(z_n - z)][a_{n+1}] \cdots [a_k][A(z_k)] \quad (2.20)$$

这里， $[a_n^L(z_n - z)]$  及  $[a_n(z_n - z)]$  分别由将  $[a_n^L]$  及  $[a_n]$  中的  $h_n$  代之以  $z_n - z$  而得到。

至此，我们可认为已经得到了介质内部任意点处位移及面应力分量之解。它们视边界条件的具体情况可在笛卡尔或柱向量函数系下表示出

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ U_M(z) \frac{\partial S}{\partial x} + U_N(z) \frac{\partial S}{\partial y} \right] da d\beta \\ u_y(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ U_M(z) \frac{\partial S}{\partial y} - U_N(z) \frac{\partial S}{\partial x} \right] da d\beta \\ u_z(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U_L(z) S(x, y) da d\beta \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} u_r(r, \theta, z) = \sum_m \int_0^{+\infty} \left[ U_M(z) \frac{\partial}{\partial r} S + U_N(z) \frac{\partial}{r \partial \theta} S \right] \lambda d\lambda \\ u_\theta(r, \theta, z) = \sum_m \int_0^{+\infty} \left[ U_M(z) \frac{\partial}{r \partial \theta} S - U_N(z) \frac{\partial}{\partial r} S \right] \lambda d\lambda \\ u_z(r, \theta, z) = \sum_m \int_0^{+\infty} U_L(z) S(r, \theta) \lambda d\lambda \end{cases} \quad (2.22)$$

将 (2.21) 及 (2.22) 式左端分别以  $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{yy}$ 、 $\sigma_{zz}$  及  $\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{\theta z}$ 、 $\sigma_{zr}$  代替，同时在右端以  $T$  代替  $U$ ，则分别得到面应力向量在两组向量函数系下的解。

剩下的工作是推导余下几个应力分量之表达式。如我们在文 [9] 中得到的结论，余下的应力分量在利用 Hooke 定律及几何变形关系后，可由上述已知的位移及应力分量线性表达出。它们在两组向量函数系下分别是

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -2\mu_n \left( \alpha\beta U_N(z) + \left( \alpha^2 + \frac{\lambda^2 \nu_n}{1-\nu_n} \right) U_M(z) \right) + \frac{\nu_n}{1-\nu_n} T_L(z) \right] S(x, y) d\alpha d\beta \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2\mu_n \left( \alpha\beta U_N(z) - \left( \beta^2 + \frac{\lambda^2 \nu_n}{1-\nu_n} \right) U_M(z) \right) + \frac{\nu_n}{1-\nu_n} T_L(z) \right] S(x, y) d\alpha d\beta \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (\alpha^2 - \beta^2) U_N(z) - 2\alpha\beta U_M(z) \right] S(x, y) d\alpha d\beta \end{aligned} \right. \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta, z) &= \sum_m \int_0^{+\infty} \left[ 2\mu_n (U_N(z) \nabla_1 - U_M(z) \left( \frac{\lambda^2}{1-\nu_n} + \nabla_2 \right)) + \frac{\nu_n}{1-\nu_n} T_L(z) \right] S(r, \theta) \lambda d\lambda \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z) &= \sum_m \int_0^{+\infty} \left[ -2\mu_n (U_N(z) \nabla_1 + U_M(z) \left( \frac{\lambda^2}{1-\nu_n} - \nabla_2 \right)) + \frac{\nu_n}{1-\nu_n} T_L(z) \right] S(r, \theta) \lambda d\lambda \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, z) &= \sum_m \int_0^{+\infty} \mu_n [U_N(z) (\lambda^2 + 2\nabla_2) + 2U_M(z) \nabla_1] S(r, \theta) \lambda d\lambda \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

其中, 两面算符为

$$\nabla_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \nabla_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$\mu_n = E_n / [2(1+\nu_n)]$  为第  $n$  层的剪切模量。

若将两面算符之作用计算出, 并且利用 Bessel 函数  $J_m(\lambda r)$  的一些关系式, 则可将 (2.24) 式转化为易于数字计算的形式<sup>[9]</sup>。

### 三、计算方法及数字结果

作为对本文所列公式及其对应的数字化计算的难易程度的检验, 这里对文[2]及[3]中的条形及矩形表载问题作了些数字计算。在数字处理中我们引入了连分数展开形式的 Padé 近似级数和方法<sup>[11], [12]</sup>以加快由 Gauss 求积公式所得级数的收敛速度。从对本文的几个算例来看, 为满足 1% 之精度, 只需在 2—4 个区间内用 Gauss 求积公式, 看来非常有效。

#### 1. 均布条形表载 (即二维变形问题)

模型及其参数见图 2 及表 1。对此情形, (2.18) 式变为

$$\begin{aligned} & (U_L(0), \lambda U_M(0), T_L(0) / (2\lambda), 0)^T \\ &= [a_1][a_2][a_3](0, 0, T_L(H) / (2\lambda), T_M(H) / 2)^T \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中,

$$H = h_1 + h_2 + h_3$$

为总厚;

$$T_L(0) = -2q \sin(\lambda a) / (\sqrt{2\pi} \lambda) \quad (3.2)$$

即条形域  $|x| \leq a$  中均布载  $q$  在笛卡尔向量函数系下的展开系数。

由 (3.1) 式可求出等式左右端的未知量，特别可求得  $T_L(H)$  及  $T_M(H)$ ；再由 (2.20) 式则可求得任意深度  $z$  处之展开系数  $[A(z)]$ ；然后由 (2.21) 及 (2.23) 式便得到介质内任意点处之位移及应力分量（因为是二维问题，故需首先在 (2.3) 中令  $\beta=0$ ，且  $2\pi$  由  $\sqrt{2\pi}$  代替之；另外需注意， $\bar{N}$  之系数只有 0 解。对下面的例子亦如此）。

由上述公式，我们分别对两种情形：1 及 2 计算了介质沿  $z$  轴在第一、二层中的位移分量  $u_z$  及应力分量  $\sigma_{zz}$  和  $\sigma_{xx}$ ，其结果分别绘在图 3—5 中。作为比较，我们还在图 3 中标出了文[2]对两种情形在两个区间内用直接 Gauss 求积公式计算的地表沉降（亦见表 2），在图 4—5 中以虚线绘出了文[2]对应力分量  $\sigma_{zz}$  和  $\sigma_{xx}$  的直接 Gauss 求积计算曲

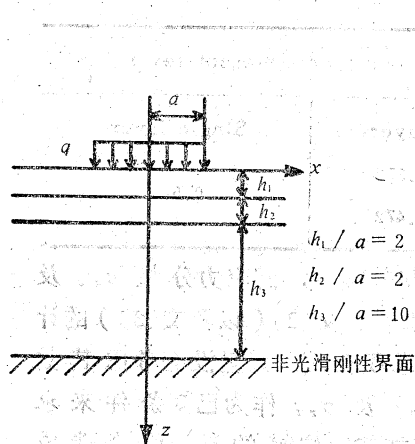


图 2 三层地基示意图

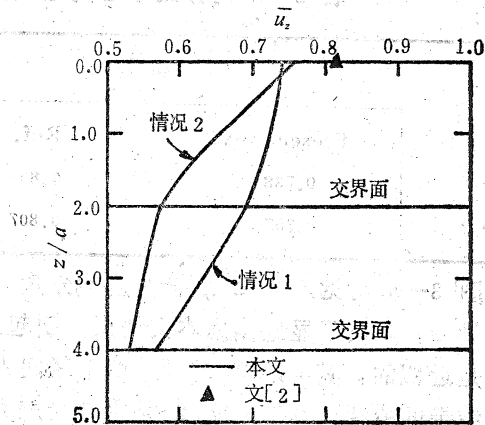


图 3 条形均布垂直荷载作用中心下的无量纲沉降

$u_x = u_z E_3 / (aq)$  ▲表示文[2]对两种情形的计算结果，亦见表 2

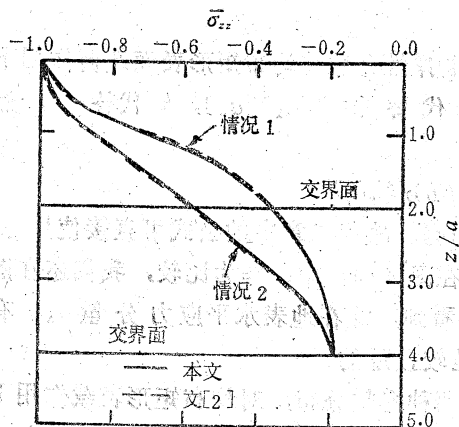


图 4 条形均布垂直荷载作用中心下的无量纲垂直应力分量  $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}/q$

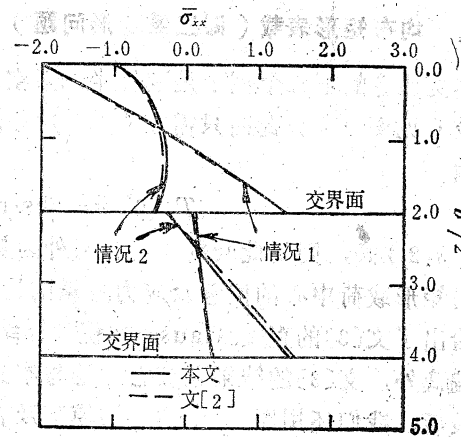


图 5 条形均布垂直荷载作用中心下的无量纲水平应力分量  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}/q$

表 1 三层介质的弹性常数

	Case1		Case2	
	$E/E_3$	$\nu$	$E/E_3$	$\nu$
Layer 1	25	0.3	5	0.4
Layer 2	5	0.4	25	0.3
Layer 3	1	0.5	1	0.5

表 2 载荷作用中心的地表无量纲沉降  $u_z$  的比较

	Strip		Rectangle(present text)	
	Present text	Ref. (2)	3 layers	Single layer
Case 1	0.738	0.805	0.372	0.570
Case 2	0.757	0.807	0.472	

线。从图 3—5 可见，文〔2〕给出的应力分量  $\sigma_{zz}$  与本文结果较接近，而应力分量  $\sigma_{xx}$  及位移分量  $u_z$  则较明显地偏离本文结果。引起这种偏离的原因在于文〔2〕（以及文〔3〕）的计算结果是近似的：其一，文〔2〕只在两个区间内用了 Gauss 求积公式，而且没有考虑其数字积分结果的精度；其二，文〔2〕是将地表应力分量  $\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{yz}$  及  $\sigma_{zz}$  作为已知条件来求解一高阶线性方程组而得到  $u_z$  及  $\sigma_{xx}$  等量的，因而如果不加精度控制的话，就会造成  $u_z$  及  $\sigma_{xx}$  等量偏离其精确值更远。另外，从图 3 还可以看到，情形 1 及情形 2 对表载的响应差别在位移分量  $u_z$  的曲线中表现得非常清楚，即在较刚性的层中位移量之变形较小。

## 2. 均布矩形表载（即三维变形问题）

本文计算的第二个例子是刚性半无限空间上的单层弹性介质在均布矩形表面载荷作用下的响应（见图 6）。此时只需在（3.1）式中用  $[a_1]$  代替  $[a_1][a_2][a_3]$ ， $h$  代替  $H$ ，然后再由

$$T_L(0) = -2q\sin(\alpha a)\sin(\beta b)/(\pi\alpha\beta)$$

代替（3.2）式，则得此问题之解。另外因是对三维问题，故第二章中的公式可直接使用。

对矩形载荷中心的位移及应力分量的计算结果绘在图 6—7 中。作为比较，我们还在图 7 中给出了文〔3〕的直接 Gauss 求积计算结果。可以看到，除在地表水平应力分量  $\sigma_{xx}$  有较大偏离外，文〔3〕的结果在其它点处与本文结果还是较接近的。

最后，我们还用图 2 中的三层模型及表 1 中的两种参数分布，对均布矩形表载作用下中心点处的位移及应力分量在第一、二层中的分布作过计算。值得注意的是，所得结果与对均布条形表载下的结果有相似分布曲线，只是对矩形情形的位移及应力分量的绝对值比对条形情形下的来得小（比较表 2 中的第 1 列及第 3 列数字）。由此我们可得出一个很有



意义的结论,即在分析地基层状模型对表载的静态响应曲线的特征时,使用条形表载足已<sup>[2]</sup>。

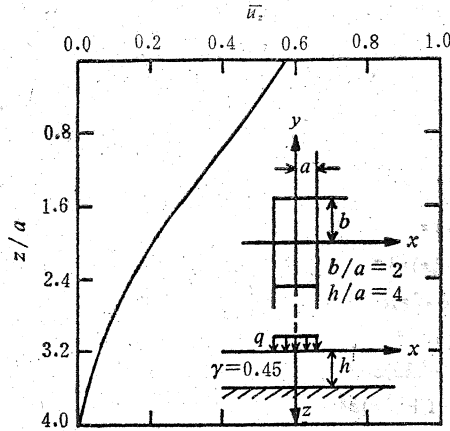


图 6 矩形均布垂直载荷作用中心下的无量纲沉降  $\bar{u}_z = u_z E / (aq)$

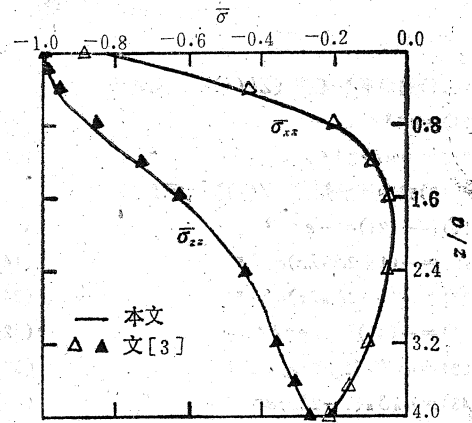


图 7 矩形均布垂直载荷作用中心下的无量纲应力分量  $\bar{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz} / q$

#### 四、结 语

本文以两组向量函数为基,利用传播矩阵方法对多层各向同性弹性静力学问题给予了一个统一的简洁的解答。本文的处理方法优越于以前此方面的工作之点在于:1)传播矩阵的求得避免了联立方程的求解,而代之以这一复杂运算的仅仅是简单的矩阵乘;2)两组向量函数系的同时使用则使我们能很方便地统一处理此类问题,即对矩形类(条形即二维变形为其特例)表载用上面笛卡尔向量函数系之公式(2.2)、(2.3)、(2.21)及(2.23)去求解,而对圆形类(轴对称为其特例)表载则用上面柱向量函数系之公式(2.4)、(2.5)、(2.22)及(2.24)去求解;3)值得特别提出的是,用笛卡尔向量函数系代替直接的双重 Fourier 变换法避免了直接 Fourier 变换方法中因引入辅助变量及坐标变换而导致的复杂性。所得公式简单且易于数字处理。另外,为满足实际问题计算中精度的要求及降低机时,一个改进的 Padé 级数求和技术被引入数字计算中。本文给出的部分数字结果既证明了本文公式的正确性,又显示出其简单易于计算的特点。

最后指出,虽然在本文假定了层间的连续性条件为固接,但本文的研究方法(即基于向量函数系的传播矩阵法)是不难于分析另外一些层间连续性条件的,如光滑接触。这种接触条件下的一般结果目前正在研究之中。

本文的完成得到了本院抗震防护所汪雍熙高级工程师的鼓励和支持;全部计算费由水库地震组资助,在此一并致谢。

## 附 录 I

(2.11)式中通解矩阵  $[Z^L(z)]$  的元素为

$$(11) = e^{-\lambda z}$$

$$(12) = e^{\lambda z}$$

$$(21) = -\mu_n e^{-\lambda z}$$

$$(22) = \mu_n e^{\lambda z}$$

(2.12)式中通解矩阵  $[Z(z)]$  之元素为

$$(11) = -(21) = -e^{-\lambda z}$$

$$(12) = (22) = e^{\lambda z}$$

$$(13) = -(1+2\delta_n \lambda z) e^{-\lambda z}$$

$$(14) = (1-2\delta_n \lambda z) e^{\lambda z}$$

$$(23) = -(1-2\delta_n \lambda z) e^{-\lambda z}$$

$$(24) = -(1+2\delta_n \lambda z) e^{\lambda z}$$

$$(31) = -(41) = \mu_n e^{-\lambda z}$$

$$(32) = (42) = \mu_n e^{\lambda z}$$

$$(33) = \mu_n \delta_n (1+2\lambda z) e^{-\lambda z}$$

$$(34) = \mu_n \delta_n (1-2\lambda z) e^{\lambda z}$$

$$(43) = \mu_n \delta_n (1-2\lambda z) e^{-\lambda z}$$

$$(44) = -\mu_n \delta_n (1+2\lambda z) e^{\lambda z}$$

这里,

$$\delta_n = 1/(3-4\nu_n).$$

## 附 录 II

(2.15)式中传播矩阵  $[a^J_n]$  的元素为 (略写下标  $n$ )

$$(11) = (22) = \text{ch}(\lambda h),$$

$$(12) = -\mu^{-1} \text{sh}(\lambda h),$$

$$(21) = -\mu \text{sh}(\lambda h).$$

这里,  $\text{sh}$  与  $\text{ch}$  分别表示双曲正弦与双曲余弦。

(2.16)式中的传播矩阵  $[a_n]$  则可由另一矩阵表示, 即

$$[a_n] = \frac{1}{2\mu_n(1+\delta_n)} [b_n]$$

这里, 矩阵  $[b_n]$  的元素为 (略写下标  $n$ )

$$(11) = (33) = 2\mu [(1+\delta)\text{ch}(\lambda h) - 2\delta\lambda h \text{sh}(\lambda h)]$$

$$(12) = -(43) = 2\mu [(1-\delta)\text{sh}(\lambda h) - 2\delta\lambda h \text{ch}(\lambda h)]$$

$$(13) = 4 [-\text{sh}(\lambda h) + \delta\lambda h \text{ch}(\lambda h)]$$

$$(14) = -(23) = 4\delta\lambda h \text{sh}(\lambda h)$$

$$(21) = -(34) = 2\mu [(1-\delta)\text{sh}(\lambda h) + 2\delta\lambda h \text{ch}(\lambda h)]$$

$$(22) = (44) = 2\mu [(1+\delta)\text{ch}(\lambda h) + 2\delta\lambda h \text{sh}(\lambda h)]$$

$$(24) = -4 [\text{sh}(\lambda h) + \delta\lambda h \text{ch}(\lambda h)]$$

$$(31) = 4\mu^2 \delta [-\text{sh}(\lambda h) + \lambda h \text{ch}(\lambda h)]$$

$$(32) = -(41) = 4\mu^2 \delta \text{sh}(\lambda h)$$

$$(42) = -4\mu^2 \delta [\text{sh}(\lambda h) + \lambda h \text{ch}(\lambda h)]$$

## 参 考 文 献

- [1] Selvadurai, A.P.S. Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction. Elsevier, Amsterdam (1979), 543pp.
- [2] Small, J.C. and Booker, J.R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part 1—strip loadings. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20 (1984), 1025-1037.
- [3] Small, J.C. and Booker, J.R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part 2—circular and rectangular loadings. *Int. J. Numer. Metho-*

- ds Eng.*, 23(1986), 959-978.
- [4] Nakiboglu, S.M. and Lambeck, K. A study of the earth's response to surface loading with application to Lake Bonneville. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 70(1982), 577-620.
- [5] Burmister, D. M. The general theory of stresses and displacements in layered soil systems. *J. Appl. Phys.* 16(1945), 89-96.
- [6] Poulos, H. G. Stresses and displacements in an elastic layer underlain by a rough rigid base. *Geotechnique* 17(1967), 378-410.
- [7] 王凯.  $N$ 层弹性连续体系在双圆均布复合荷载作用下的力学计算. 固体力学学报, 第1期(1983), 136-153.
- [8] 岳中琦, 王仁. 多层横观各向同性弹性体静力学问题的解. 北京大学学报(自然科学版), 24(1988), 202-211.
- [9] 潘尔年, 多层地基对一般表载及体力的静态响应. 力学学报. (刊印中).
- [10] улико, А.ф. 1979. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости, Киев «Наукова думка» с.264.
- [11] Chave, A.D. Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion. *Geophys.* 48(1983), 1671-1686.
- [12] Bender, C.M. and Orszag, S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York(1978), 593pp.

## DEFORMATION OF A LAYERED ELASTIC SYSTEM BY GENERAL SURFACE LOADS

Pan Ernian

(*Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power Research*)

### Abstract

A general and considerably simple analysis, i.e. presented the propagator matrix method in two systems of vector functions is to solve the layered isotropic elastostatic problem. This approach avoids the complicated nature of the problem. The analytical expressions of displacement and stress components at any point of the medium by general surface loads are obtained in these two systems. Numerical examples given verify that the present formulation is correct, and also show that when the modified Padé approximant technique is used in the numerical integration the present method is particularly efficient and easy to apply in practice.