

具有光滑接触面的层状弹性系统内的位移和应力

潘尔年

(水利水电科学研究院)
1989年4月14日收到

摘 要

本文将作者最近的一个工作推广到了层界面存在光滑接触的情形,对光滑接触与固接的组合(即不同个数光滑接触面)情形给予了详细的讨论,获得了在一般表载作用下的多层弹性半空间介质内任意点处的位移及应力分量的解析表达式。所得结果包括了以前学者在某些假定下的研究工作。

一、引 言

在自然科学的许多分支中,真实介质的物理性质通常呈现出非均匀性,对其进行直接研究往往很困难,而且其数字模拟计算是相当花费的。但是物理上确有一大类介质,它们的物性只在一个方向上表现出较强的非均匀性,如复合材料和地基等,而且其非均匀性还可用均匀的多层介质来近似。这样虽然大大简化了问题的处理,但其数字计算对层数较多的情形仍然是相当复杂的^{[1]-[3]}。当层间的连续性条件为固接时,文〔4〕和〔5〕用类似于传播矩阵法^[6]的方法研究了层状弹性半空间中的某些特殊问题;文〔7〕利用传播矩阵法对一般表载及体力作用下的多层地基的静态变形作过分析;文〔8〕则利用两组向量函数系下的传播矩阵法系统地分析了层状弹性体的变形。但是除了文〔5〕外,所有上述讨论基本上是在层间为固接的假定下进行的。

本文的目的在于将文〔8〕中的一般结果推广到层界面存在光滑接触的情形以进一步扩大传播矩阵法的应用。对光滑接触与固接的组合情形给予了详细的分析,推导出了多个光滑接触面时计算两组向量函数系下的展开系数的公式。因而结合文〔8〕便可对不同层间接触情形在一般表载作用下的多层弹性半空间内的变形进行分析研究。

二、对一个光滑接触面情形的解

当层状介质的某一交界面为光滑接触时，位移及面应力分量通过此面时并非皆连续，因而会比固接情形下的结果复杂一些。图 1 所示为一多层弹性半无限空间。先假定除 $z_n=h$ 这个界面为光滑接触外，其它交界面均为固接。在 $z_n=h$ 上，我们有

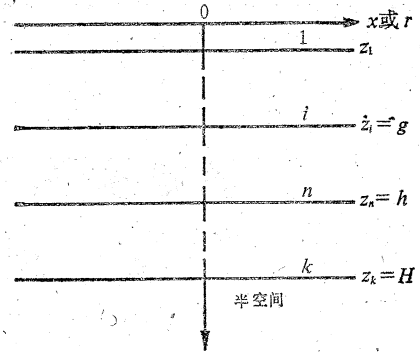


图 1 多层弹性半空间示意图

$$\begin{cases} u_z(x, y, h-0) = u_z(x, y, h+0) \\ \sigma_{zz}(x, y, h-0) = \sigma_{zz}(x, y, h+0) \\ \sigma_{xz}(x, y, h-0) = \sigma_{xz}(x, y, h+0) = 0 \\ \sigma_{yz}(x, y, h-0) = \sigma_{yz}(x, y, h+0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

这里， $h-0$ 和 $h+0$ 分别表示位移、应力分量在第 n 层和第 $n+1$ 层中的量。将 (1) 式由两组向量函数系的展开系数^[8]表示，则有

$$\begin{cases} U_L(h-0) = U_L(h+0) \\ T_L(h-0) = T_L(h+0) \\ T_M(h-0) = T_M(h+0) = 0 \\ T_N(h-0) = T_N(h+0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

因只有 $z_n=h$ 界面为光滑接触，文 [8] 的矩阵传播对由 $z_n=h$ 界面分开的两个多层区域仍适应，即

$$\begin{cases} [A(0)] = [a_1][a_2] \cdots [a_n][A(h-0)] \\ [A(h+0)] = [a_{n+1}] \cdots [a_k][Z(H)][C] \\ [A^L(0)] = [a_1^L][a_2^L] \cdots [a_n^L][A^L(h-0)] \\ [A^L(h+0)] = [a_{n+1}^L] \cdots [a_k^L][Z^L(H)][C^L] \end{cases} \quad (3)$$

(3) 式中各矩阵的定义与文 [8] 相同： $[a_n]$ 和 $[a_n^L]$ 为已知的传播矩阵， $[Z(H)]$ 和 $[Z^L(H)]$ 为已知解矩阵，它们的元素皆已给在文 [8] 中； $[A(z)]$ 和 $[A^L(z)]$ 为位移及面应力分量的展开系数组成的列阵^[8]； $[C] = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ 和 $[C^L] = (c_1^L, c_2^L)^T$ 为待定常列阵，上标 T 表矩阵的转置。

利用地表上的边界条件以及解在半无限空间中的有界条件（这里为 $c_3 = c_4 = c_2^L = 0$ ），我们便可求出 (3) 式两端的未知量；再由矩阵传播就可求出任意深度 z 处的展开系数；最后由文 [8] 中的适当公式便能求得介质内任意点处的位移及应力分量。例如，假设在地表 $z_0=0$ 上的面应力为已知，因而我们可认为它在两组向量函数系下的展开系数 $T_L(0)$ ， $T_M(0)$ 和 $T_N(0)$ 为已知。通过一些代数运算后可得到 (3) 式中未知量的如下表达式：

$$\begin{cases} c_1^L = 0 \\ \lambda U_N(h+0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \lambda U_N(h-0) = T_N(0)/P_{21}^L \\ \lambda U_N(0) = T_N(0)P_{11}^L/P_{21}^L \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} c_1 = [P_{42}T_L(0)/(2\lambda) - P_{32}T_M(0)/2]/\Delta_3 \\ c_3 = -Q_{41}c_1/Q_{43} \\ \lambda U_M(h-0) = [(P_{31}\Delta_1 + P_{33}\Delta_2)T_M(0)/2 - (P_{41}\Delta_1 + P_{43}\Delta_2)T_L(0)/(2\lambda)]/\Delta_3 \\ U_L(0) = (P_{11}\Delta_1 + P_{13}\Delta_2)c_1 + P_{12}\lambda U_M(h-0) \\ \lambda U_M(0) = (P_{21}\Delta_1 + P_{23}\Delta_2)c_1 + P_{22}\lambda U_M(h-0) \end{cases} \quad (6)$$

(4) — (6) 式中, λ 为在向量函数系下展开时引入的参变量^[8];

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= Q\|_{12}^{14}/Q_{43}; \quad \Delta_2 = Q\|_{13}^{34}/Q_{43} \\ \Delta_3 &= \Delta_1 P\|_{21}^{43} + \Delta_2 P\|_{23}^{43} \end{aligned} \quad (7)$$

$Q\|_{ki}^{ij}$ 的定义为

$$Q\|_{ki}^{ij} = Q_{ik}Q_{ji} - Q_{ji}Q_{ik}$$

P_{ij} , P_{ij}^L 及 Q_{ij} 分别为下列矩阵的 (i, j) 元素

$$[P] = [a_1][a_2] \cdots [a_n] \quad (8)$$

$$[P^L] = [a_1^L][a_2^L] \cdots [a_n^L] \quad (9)$$

$$[Q] = [a_{n+1}] \cdots [a_k][Z(H)] \quad (10)$$

值得指出的是, (4) 式有一个直接的物理解释: 由于在 $z_n = h$ 界面上为光滑接触, 上部 ($z < h$) 的扭转型 (包括滑转型) (对应于向量函数 $\vec{N}^{[8]}$ 之解 (剪切应力传不到下部 ($z > h$)), 因而下部的扭转型位移只有零解。对下面的 (11) 式亦有类似的解释。

三、对多个光滑接触面情形的解

如图 1 所示, 假定 $z_i = g$ 和 $z_n = h$ 为层状半空间中的两个光滑接触界面。此时我们可推出如下关系式

$$\begin{cases} \lambda U_N(g+0) = 0 \\ \lambda U_N(h-0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \lambda U_M(h-0) = -(R_{41}U_L(h-0) + R_{43}T_L(h-0)/(2\lambda))/R_{42} \\ \lambda U_M(g+0) = -(R_{41}^{-1}U_L(g+0) + R_{43}^{-1}T_L(g+0)/(2\lambda))/R_{42}^{-1} \end{cases} \quad (12)$$

这里, R_{ij} 为矩阵 $[R]$ 的 (i, j) 元素,

$$[R] = [a_{i+1}] \cdots [a_n] \quad (13)$$

R_{ij}^{-1} 为矩阵 $[R]^{-1}$, 即 $[R]$ 的逆矩阵的 (i, j) 元素,

$$[R]^{-1} = [a_n]^{-1} \cdots [a_{i+1}]^{-1}$$

从文 [8] 可知, $[a_n(z)]^{-1} = [a_n(-z)]$, 因此 $[R]^{-1}$ 由简单的矩阵乘便可得到。

另外, 我们还可推导出一个关于 U_L 及 T_L 的传播关系

$$\begin{pmatrix} U_L(g) \\ T_L(g)/(2\lambda) \end{pmatrix} = [R'] \begin{pmatrix} U_L(h) \\ T_L(h)/(2\lambda) \end{pmatrix} \quad (14)$$

这里, $[R']$ 的元素为

$$\begin{cases} (1,1) = R \|_{12}^{14} / R_{42} \\ (1,2) = R \|_{32}^{14} / R_{42} \\ (2,1) = R \|_{12}^{34} / R_{42} \\ (2,2) = R \|_{32}^{34} / R_{42} \end{cases} \quad (15)$$

值得指出的是, 一个类似于 (14) 式的结果曾由王林生在轴对称变形假定下得到过^[5]。

下面我们将对两个光滑接触界面情形 (亦假定地表应力分量为已知) 来推导其中未知量的表达式。

首先, 由于光滑接触界面的存在, 扭转型部分只在 $z_i = g$ 的上部有非零解, 它们由类似于 (5) 式的方程式表示

$$\begin{cases} \lambda U_N(g-0) = T_N(0) / P_{21}^L \\ \lambda U_N(0) = T_N(0) P_{11}^L / P_{21}^L \end{cases} \quad (16)$$

这里,

$$[P^L] = [a_1^L][a_2^L] \cdots [a_7^L]$$

对应于向量函数 \vec{L} 及 $\vec{M}^{(8)}$ 之解为

$$\begin{cases} c_1 = [P_{42} T_L(0) / (2\lambda) - P_{32} T_M(0) / 2] / \Delta_4 \\ c_3 = -Q_{41} c_1 / Q_{43} \\ \lambda U_M(g-0) = [T_M(0) e_1 / 2 - T_L(0) e_2 / (2\lambda)] / \Delta_4 \\ U_L(0) = P_{12} \lambda U_M(g-0) + (P_{11} f_1 + P_{13} f_2) c_1 \\ \lambda U_M(0) = P_{22} \lambda U_M(g-0) + (P_{21} f_1 + P_{23} f_2) c_1 \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= R'_{11} \Delta_1 + R'_{12} \Delta_2 \\ f_2 &= R'_{21} \Delta_1 + R'_{22} \Delta_2 \\ e_1 &= P_{31} f_1 + P_{33} f_2 \\ e_2 &= P_{41} f_1 + P_{43} f_2 \\ \Delta_4 &= P_{42} e_1 - P_{32} e_2 \end{aligned}$$

Δ_1 和 Δ_2 的表达式见 (7) 式; 另外, 矩阵 $[P]$ 与 (8) 式有区别, 这里为

$$[P] = [a_1][a_2] \cdots [a_i]$$

至此, 我们可认为已解答了存在两个光滑接触界面的多层弹性半无限空间的一般变形问题。其矩阵传播时所需的量由 (16) 及 (17) 式给出, 并结合光滑接触面之间的两个关系式 (12) 及 (14) 式。当光滑接触界面多于两个时, 只须由传播关系 (14) 式传递, 便可将其在形式上转化为对两个光滑接触界面的结果。需要注意的是, 传播矩阵 $[R']$ 的元素在每两

个相邻的光滑接触面之间是不同的, 它们由类似于 (15) 式的传播矩阵给出。

最后, 我们简单讨论一下多个光滑接触界面的特情, 即每个层界面皆为光滑接触。王林生曾在轴对称变形假定下求解过此特殊问题^[5]。在这里, 我们假设在地表作用的是一般载荷, 即假定面应力分量的展开系数 $T_L(0)$, $T_M(0)$ 及 $T_N(0)$ 为已知。这时, 除第一层外, 另外层中的扭转型解皆为零。在第一层中的两个界面上的未知量为 (亦类似于 (5) 式)

$$\begin{cases} \lambda U_N(z_1-0) = T_N(0)/P_{21}^L \\ \lambda U_N(0) = T_N(0)P_{11}^L/P_{21}^L \end{cases} \quad (18)$$

这里,

$$[P^L] = [a_1^L]$$

对应于向量函数 \vec{L} 和 \vec{M} 之解, 可由如下过程获得: 首先由 (14) 式矩阵传播, 我们有

$$\begin{pmatrix} U_L(0) \\ T_L(0)/(2\lambda) \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} U_L(H) \\ T_L(H)/(2\lambda) \end{pmatrix} \quad (19)$$

这里,

$$[S] = [R_1^*][R_2^*] \cdots [R_i^*];$$

再利要最下一层 (均匀半空间) 解矩阵的表达式 $[Z(H)]$, 便可得到

$$\begin{cases} c_1 = \frac{T_L(0)/(2\lambda)}{(S_{21}A_1 + S_{22}A_2)} \\ c_3 = -Z_{41}(H)c_1/Z_{43}(H) \\ U_L(0) = \frac{(S_{11}A_1 + S_{12}A_2)T_L(0)/(2\lambda)}{(S_{21}A_1 + S_{22}A_2)} \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$A_1 = Z(H)\|_{13}^4/Z_{43}(H), \quad A_2 = Z(H)\|_{13}^3/Z_{43}(H)$$

注意到均匀半空间顶面 $z_k = H$ 上的法向位移及应力分量的展开系数可由下式表示

$$\begin{pmatrix} U_L(H) \\ T_L(H)/(2\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} c_1$$

我们就可结合此式与 (19) 式将其传播到任意深度处而求出那里的展开系数 $U_L(z)$ 及 $T_L(z)/(2\lambda)$, 特别可得到 $U_L(z_1)$ 及 $T_L(z_1)/(2\lambda)$; 有了此二量后我们便可由下式求得第一层中的“切向”位移分量的展开系数

$$\begin{cases} \lambda U_M(z_1-0) = [T_M(0)/2 - P_{41}U_L(z_1) - P_{43}T_L(z_1)/(2\lambda)]/P_{42} \\ \lambda U_M(0) = P_{21}U_L(z_1) + P_{22}\lambda U_M(z_1-0) + P_{23}T_L(z_1)/(2\lambda) \end{cases}$$

其它层内的“切向”位移分量展开系数则由类似于 (12) 式的关系式计算。

四、小 结

本文将文〔8〕的分析方法,即基于两组向量函数系的传播矩阵法推广到了层间存在光滑接触的情形。在两组向量函数系下,求得了多层弹性半空间在一般表载作用下的位移及面应力向量的展开系数。所得结果对光滑接触与固接的不同组合情形皆成立。结合文〔8〕中的适当公式便能分析一般表载作用下的三维变形,特别还可直接用于分析二维及轴对称变形。

参 考 文 献

- 〔1〕 Small, J.C. and Booker, J.R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part 1—strip loadings. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20 (1984), 1025—1037.
- 〔2〕 Small, J.C. and Booker J.R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part 2—circular and rectangular loadings. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23 (1986), 959—978.
- 〔3〕 Wang Kai. Analysis and calculation of stresses and displacements in layered elastic system. *Acta Mech. Sinica* 3 (1987), 251—260.
- 〔4〕 郭文复, 多层半无限弹性体在圆形荷载作用下的解析解, *力学学报* 16 (1984), 282—289.
- 〔5〕 王林生, 求解成层地基空间轴对称问题的初参数法, *力学学报* 18 (1986), 528—537.
- 〔6〕 Gilbert, F. and Backus, G. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophys.* 31 (1966), 326—332.
- 〔7〕 潘尔年, 多层地基对一般表载及体力的静态响应, *力学学报* (刊印中).
- 〔8〕 潘尔年, 一般表载作用下的层状弹性系统的变形, *计算物理* 6 (1989), 355—366.

DISPLACEMENTS AND STRESSES IN A LAYERED ELASTIC SYSTEM WITH SMOOTH CONTACT INTERFACES

Pan Ernian

(*Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power Research*)

Abstract

The author's recent work has been extended in this paper to the corresponding layered system with smooth contact interfaces. Various cases of smooth contact interfaces are considered, and the analytical expressions of displacements and stresses at any point of this medium by general surface loads are obtained. These results contain some special ones obtained by previous researchers.