

# 多层地基对一般表载及体力的静态响应

潘尔年

(水利水电科学研究院抗震防护所)

**提要** 基于作者最近的工作<sup>[1]</sup>, 本文对一般表载及体力作用下的多层弹性地基的静态响应问题给予了较详细的讨论. 以柱谐向量函数系为基础, 应用传播矩阵技术给出了求解此类问题所必须的公式, 并且还对不同层数及不同表载作用情形的几个例子作了数字计算. 在数值积分中应用了一强迫技术以加快由此所得的缓慢收敛序列的收敛速度.

无论是从本文所给公式还是从公式的程序化及数字计算来看, 柱谐向量函数系, 传播矩阵法及强迫技术的联合应用既具一般性, 又简单且易于实际应用, 因而将其用于分析实际问题, 特别是多层地基的粘弹性响应问题将是特别方便、有效的.

**关键词** 多层地基, 特殊向量函数, 传播矩阵法, 强迫技术.

## 一、引言

文献[1]指出, 多层地基的处理一直是工程上很重要的一个课题. 其关键往往在于: 一方面能在理论上合理地模拟地基的多层性, 另一方面则又能保证其数学上的处理简单明了, 易于迅速计算. 文[2-4]虽对无体力情形下的对称及一特殊的非对称载荷作用下的多层弹性地基的静态响应给予了解答且作过试算, 但他们的处理仅限于对称载荷及无体力情形, 不可能直接处理一般载荷情形, 更无法处理体力非0情形([2]中虽对非对称载荷的一个特情作过分析计算, 但其推导及所采用的回代处理方法较复杂, 且不易于一般推广); 文[5]虽对多层横观各向同性弹性体的一般静力学问题在理论上给予了讨论, 但要对工程实际问题将其公式程序化并进行计算还有一定的困难.

本文的目的在于: 首先利用柱谐向量函数系的正交性<sup>[6]</sup>, 将一般表载及体力在此函数系下的正弦及余弦分量下展开(此种展开方式比起[1]中的展开式来更便于实际应用); 然后利用[1]中推广的传播矩阵法<sup>[7]</sup>, 将层界面及边界面上的位移及应力向量为简单的矩阵乘形式, 其余应力分量由胡克定律联系后表为上述位移及应力向量的线性组合; 最后, 作为对已给公式正确性及其可否方便地用于工程实际的检验, 对文[2]、[3]中的三个例子用本文的公式作了计算.

## 二、一般表载及体力在柱谐向量函数系下的展开

为展开系数的计算方便及易于实际应用, 我们在此首先将柱谐向量函数系<sup>[6]</sup>的正弦

及余弦项分开,且分别用上标  $s$  及  $c$  表示,即

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{P}_m &\equiv \mathbf{P}_m^c + \mathbf{P}_m^s \\
 &\equiv \hat{e}_z J_m(kr) \cos m\theta + \hat{e}_z J_m(kr) \sin m\theta \\
 \mathbf{B}_m &\equiv \mathbf{B}_m^c + \mathbf{B}_m^s \\
 &\equiv \left( \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial kr} + \hat{e}_\theta \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) J_m(kr) \cos m\theta \\
 &\quad + \left( \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial kr} + \hat{e}_\theta \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) J_m(kr) \sin m\theta \\
 \mathbf{C}_m &\equiv \mathbf{C}_m^c + \mathbf{C}_m^s \\
 &\equiv \left( \hat{e}_r \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial kr} \right) J_m(kr) \cos m\theta \\
 &\quad + \left( \hat{e}_r \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial kr} \right) J_m(kr) \sin m\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中  $J_m(kr)$  为  $m$  阶 Bessel 函数;  $\hat{e}_r$ 、 $\hat{e}_\theta$ 、 $\hat{e}_z$  为柱坐标系的正交单位矢量 (见图 1)。

由上述函数系的正交完备性,我们便可在较一般的假定下将任意表载或体力在此系下展开。

对任意表载,我们有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(r, \theta) &= \sigma_{zr} \hat{e}_r + \sigma_{z\theta} \hat{e}_\theta + \sigma_{zz} \hat{e}_z \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk [ (L_P^c(m, k) \mathbf{P}_m^c + L_B^c(m, k) \mathbf{B}_m^c \\
 &\quad + L_C^c(m, k) \mathbf{C}_m^c) + (L_P^s(m, k) \mathbf{P}_m^s \\
 &\quad + L_B^s(m, k) \mathbf{B}_m^s + L_C^s(m, k) \mathbf{C}_m^s) ]
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{pmatrix} L_P^c \\ L_P^s \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi \delta_m} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{L} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_m^c \\ \mathbf{P}_m^s \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} L_B^c \\ L_B^s \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi \delta_m} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{L} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_m^c \\ \mathbf{B}_m^s \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} L_C^c \\ L_C^s \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi \delta_m} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{L} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_m^c \\ \mathbf{C}_m^s \end{pmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad \delta_m = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 1 & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

类似地,对任意体力,我们可得如下展开式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk [ (f_P^c(m, k, z) \mathbf{P}_m^c + f_B^c(m, k, z) \mathbf{B}_m^c \\
 &\quad + f_C^c(m, k, z) \mathbf{C}_m^c) + (f_P^s(m, k, z) \mathbf{P}_m^s \\
 &\quad + f_B^s(m, k, z) \mathbf{B}_m^s + f_C^s(m, k, z) \mathbf{C}_m^s) ]
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

其展开系数的计算类似于对表载  $\mathbf{L}$  的计算。

### 三、一般表载及体力作用下的多层弹性地基的静态解

如图 1 所示,假定我们所要处理的地基是由  $P + 1$  个各向同性的弹性均匀层组成的;层与层之间的连续性条件为简化起见取为固接(由下面的推导不难看出,对存在位移或应力向量间断的界面,亦可推广处理)。坐标原点选在最上一层的表面,且选取图示的两组坐标系,即笛卡尔系与柱坐标系。在此情形下,对任一层(如对第  $n$  层),都有如下弹性静力平衡方程

$$\text{grad div } \mathbf{u}_n - \beta_n \text{rot rot } \mathbf{u}_n = -\rho_n \alpha_n \mathbf{F}_n \tag{3.1}$$

这里,

$$\alpha_n = \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} \quad \beta_n = \frac{(1 - 2\nu_n)}{2(1 - \nu_n)}$$

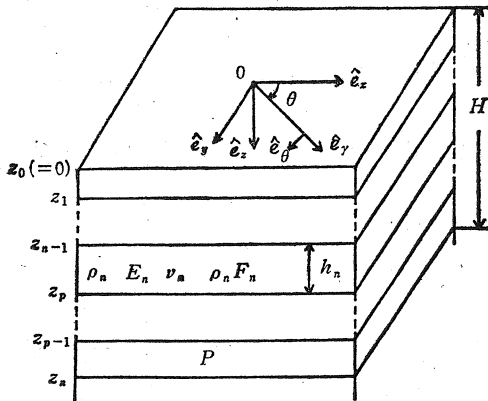


图 1 坐标系及各层参数示意图

让我们首先考虑无体力情形。此时(3.1)变为

$$\text{grad div } \mathbf{u}_n - \beta_n \text{rot rot } \mathbf{u}_n = 0 \tag{3.2}$$

不难从文[1]推出,上述一般表载作用下的第  $n$  层的位移及“面”应力向量可在柱谱向量函数系下表为如下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\mathbf{u}_{nm}^c + \mathbf{u}_{nm}^s) k dk \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n &= \sigma_{rz} \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta z} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\mathbf{T}_{nm}^c + \mathbf{T}_{nm}^s) k dk \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{nm}^c &= x_{nm}^c \mathbf{P}_m^c + y_{nm}^c \mathbf{B}_m^c + z_{nm}^c \mathbf{C}_m^c \\ \mathbf{T}_{nm}^c &= 2k X_{nm}^c \mathbf{P}_m^c + 2k Y_{nm}^c \mathbf{B}_m^c + k Z_{nm}^c \mathbf{C}_m^c \end{aligned}$$

上标  $c$  表示,当其分别以  $c$  和  $s$  代替时关系式成立(下同)。

引入列阵(因函数系的正交性,  $C_m$  分量与  $P_m$  及  $B_m$  分量是相互独立的, 以下用左上标  $L$  区别之)

$$[A_{nm}^e(z)] = [x_{nm}^e, y_{nm}^e, X_{nm}^e, Y_{nm}^e]^T$$

$$[{}^L A_{nm}^e(z)] = [z_{nm}^e, Z_{nm}^e]^T,$$

并且利用层界面的位移及“面”应力向量的连续性条件, 不难得到层间的传播关系

$$\left. \begin{aligned} [A_{n-1,m}^e(z_{n-1})] &= [a_n][A_{nm}^e(z_n)] \\ [{}^L A_{n-1,m}^e(z_{n-1})] &= [{}^L a_n][{}^L A_{nm}^e(z_n)] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

这里,  $[a_n]$  与  $[{}^L a_n]$  即由解矩阵产生的所谓传播矩阵<sup>[7]</sup>, 其元素见文[1].

将传播关系(3.5)向上及向下“传播”, 便可得到地表的位移及“面”应力向量与最下层下界面的位移及“面”应力向量间的关系

$$[A_{1m}^e(0)] = [a_1][a_2] \cdots [a_{p-1}][a_p][A_{pm}^e(H)] \quad (3.6a)$$

$$[{}^L A_{1m}^e(0)] = [{}^L a_1][{}^L a_2] \cdots [{}^L a_{p-1}][{}^L a_p][{}^L A_{pm}^e(H)] \quad (3.6b)$$

由地表即上二式左端的边界条件((3.6a)式有两个, (3.6b)式有一个)及最下层下界面即上二式右端的边界条件(同样, (3.6a)式含两个, (3.6b)式含一个)或当最下层为半无限空间时由解的有界性(此时(3.6a)式右端带有两待定常数, (3.6b)右端带有一个待定常数), 可求出(3.6)式中的未知量; 再由传播关系(3.5)式及解矩阵<sup>[1]</sup>则可得任意层内部的位移及“面”应力向量.

对体力非 0 的情形, 我们必须首先求出(3.1)式的特解. 若假定此体力可展成(2.3)式, 则其位移及“面”应力向量特解不难仿[1]中的方法求出. 这样第  $n$  层中的通解同样由(3.3)及(3.4)式给出, 不同的是

$$u_{nm}^e = (x_{nm}^e + {}^0 x_{nm}^e)P_m^e + (y_{nm}^e + {}^0 y_{nm}^e)B_m^e + (z_{nm}^e + {}^0 z_{nm}^e)C_m^e$$

$$T_{nm}^e = 2k(X_{nm}^e + {}^0 X_{nm}^e)P_m^e + 2k(Y_{nm}^e + {}^0 Y_{nm}^e)B_m^e + k(Z_{nm}^e + {}^0 Z_{nm}^e)C_m^e$$

左上标 0 表对应的特解, 其表达式类似于文[1]中的(2.21)式(将其体力及特解的正弦、余弦展开系数分开即得).

推广到非齐次问题的传播关系(3.5)式变为

$$\left. \begin{aligned} [\bar{A}_{n-1,m}^e(z_{n-1})] &= [\bar{a}_n][\bar{A}_{nm}^e(z_n)] \\ [{}^L \bar{A}_{n-1,m}^e(z_{n-1})] &= [{}^L \bar{a}_n][{}^L \bar{A}_{nm}^e(z_n)] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

这里,

$$[\bar{A}_{nm}^e(z)] = [x_{nm}^e + {}^0 x_{nm}^e, y_{nm}^e + {}^0 y_{nm}^e, X_{nm}^e + {}^0 X_{nm}^e, Y_{nm}^e + {}^0 Y_{nm}^e, 1]^T$$

$$[{}^L \bar{A}_{nm}^e(z)] = [z_{nm}^e + {}^0 z_{nm}^e, Z_{nm}^e + {}^0 Z_{nm}^e, 1]^T$$

传播矩阵  $[\bar{a}_n]$  及  $[{}^L \bar{a}_n]$  亦可通过在文[1]中的相应表达式中以此处的特解展开系数代入而得到.

对应于(3.6)式的关系式变为

$$\left. \begin{aligned} [\bar{A}_{1m}^e(0)] &= [\bar{a}_1][\bar{a}_2] \cdots [\bar{a}_{p-1}][\bar{a}_p][\bar{A}_{pm}^e(H)] \\ [{}^L \bar{A}_{1m}^e(0)] &= [{}^L \bar{a}_1][{}^L \bar{a}_2] \cdots [{}^L \bar{a}_{p-1}][{}^L \bar{a}_p][{}^L \bar{A}_{pm}^e(H)] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

利用地表及最下层下界面之条件, 可由上式求出在给定的一般表载及体力作用下的地表面和最下层下界面的未知量; 再由传播关系(3.7)及对应的通解矩阵便可求得任意层内部的位移及“面”应力向量. 余下的问题是由已知的位移及“面”应力向量求剩下的应力分

量  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  及  $\sigma_{\theta\theta}$ .

首先,由胡克定律可推出如下关系式

$$\left. \begin{aligned} 2kX_{nm}^c &= \frac{2\mu_n}{1-2\nu_n} \left( (1-\nu_n) \frac{dx_{nm}^c}{dz} - \nu_n k y_{nm}^c \right) \\ 2kY_{nm}^c &= \mu_n \left( k x_{nm}^c + \frac{dy_{nm}^c}{dz} \right) \\ kZ_{nm}^c &= \mu_n \frac{dz_{nm}^c}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

其中  $\mu_n = \frac{E_n}{2(1+\nu_n)}$  即第  $n$  层的剪切模量;函数  $x, y, z$  及  $X, Y, Z$  在此表示第  $n$  层中的通解.

再由胡克定律及上式,易推知第  $n$  层中的  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  及  $\sigma_{\theta\theta}$  可由已知位移及“面”应力向量表示,它们分别是

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu_n \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\ &= 2\mu_n \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk \left[ -z_{nm}^c \frac{m}{r} \left( J_{m-1} - \frac{m+1}{kr} J_m \right) \sin m\theta \right. \\ &\quad + z_{nm}^s \frac{m}{r} \left( J_{m-1} - \frac{m+1}{kr} J_m \right) \cos m\theta + \frac{\nu_n k}{(1-\nu_n)\mu_n} X_{nm}^c J_m \cos m\theta \\ &\quad + \frac{\nu_n k}{(1-\nu_n)\mu_n} X_{nm}^s J_m \sin m\theta + y_{nm}^c \left( \left( \frac{m(m+1)}{(kr)^2} - \frac{1}{1-\nu_n} \right) k J_m \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_{m-1}}{r} \right) \cos m\theta + y_{nm}^s \left( \left( \frac{m(m+1)}{(kr)^2} - \frac{1}{1-\nu_n} \right) k J_m - \frac{J_{m-1}}{r} \right) \sin m\theta \left. \right] \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= \mu_n \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ &= \mu_n \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk \left[ z_{nm}^c \left( \frac{2J_{m-1}}{r} + \left( 1 - \frac{2m(m+1)}{(kr)^2} \right) k J_m \right) \cos m\theta \right. \\ &\quad + z_{nm}^s \left( \frac{2J_{m-1}}{r} + \left( 1 - \frac{2m(m+1)}{(kr)^2} \right) k J_m \right) \sin m\theta \\ &\quad - y_{nm}^c 2m \left( \frac{J_{m-1}}{r} - \frac{m+1}{kr^2} J_m \right) \sin m\theta \\ &\quad \left. + y_{nm}^s 2m \left( \frac{J_{m-1}}{r} - \frac{m+1}{kr^2} J_m \right) \cos m\theta \right] \end{aligned} \quad (3.10b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= -\sigma_{zz} - \sigma_{rr} + \frac{E_n}{1-2\nu_n} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{dx_{nm}^c}{dz} - k y_{nm}^c \right) J_m \cos m\theta \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{dx_{nm}^s}{dz} - k y_{nm}^s \right) J_m \sin m\theta \right] k dk \end{aligned}$$

$$= -\sigma_{rr} + \frac{1}{1-\nu_n} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk [(4\nu_n X_{nm}^c - E_n y_{nm}^c) k J_m \cos m\theta + (4\nu_n X_{nm}^s - E_n y_{nm}^s) k J_m \sin m\theta] \quad (3.10c)$$

这里, Bessel 函数  $J_m$  的变量为  $kr$ , 即  $J_m = J_m(kr)$ . 顺便, 我们在此给出便于数字计算的位移分量表达式(亦对第  $n$  层):

$$u_r = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk \left[ y_{nm}^c \left( J_{m-1} - \frac{m J_m}{kr} \right) \cos m\theta - z_{nm}^c \frac{m J_m}{kr} \sin m\theta + y_{nm}^s \left( J_{m-1} - \frac{m J_m}{kr} \right) \sin m\theta + z_{nm}^s \frac{m J_m}{kr} \cos m\theta \right] \quad (3.11a)$$

$$u_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk \left[ -y_{nm}^c \frac{m J_m}{kr} \sin m\theta - z_{nm}^c \left( J_{m-1} - \frac{m J_m}{kr} \right) \cos m\theta + y_{nm}^s \frac{m J_m}{kr} \cos m\theta - z_{nm}^s \left( J_{m-1} - \frac{m J_m}{kr} \right) \sin m\theta \right] \quad (3.11b)$$

$$u_z = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk [x_{nm}^c J_m \cos m\theta + x_{nm}^s J_m \sin m\theta]. \quad (3.11c)$$

在上三式中对应地以  $\sigma_{rz}$ 、 $\sigma_{\theta z}$ 、 $\sigma_{zz}$  替换  $u_r$ 、 $u_\theta$ 、 $u_z$ , 同时以  $2kX_{nm}^c$ 、 $2kY_{nm}^c$ 、 $kZ_{nm}^c$  替换  $x_{nm}^c$ 、 $y_{nm}^c$ 、 $z_{nm}^c$ , 则得  $\sigma_{rz}$ 、 $\sigma_{\theta z}$  及  $\sigma_{zz}$  便于数字计算的公式。

#### 四、算例及结果比较

为检验本文公式的正确与否及分析其程序化并数字计算的难易程度, 我们对 [2] 及 [3] 中的三个例子用本文的方法并公式作了计算. 就如我们在 [1] 中所述, 传播矩阵的优越性在于避免解其阶数约为层数 4 倍的线性代数方程组, 使得所要作的计算仅仅是简单的矩阵乘; 而柱谐向量函数系的引入使我们能将全解分解为两简单的且相互独立的子解来分别处理. 此外, 因对这里的问题可得到解析的解矩阵, 故有关矩阵乘方面的处理比 [8] 要简单得多. 在数值处理时, 公式中的无穷积分由 20 个区间的 16 点 Gauss 求积公式代替<sup>[9]</sup>; 为以尽可能小的机时求得满足一定精度的解, 本文引入了一个强迫技术<sup>[10]</sup>, 它能加快缓慢收敛序列(或级数)的收敛速度, 而且就本文的三个例子来看此法是非常有效的(见表 1). 因它的应用不必返回进行矩阵乘等计算, 故可预料将它用于处理粘弹性层状介质时是非常节省时间的. 下面让我们分别简述算例及结果.

##### 1.3 层模型、轴对称表面载

模型及参数见图 2. 表面载荷为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= \begin{cases} -q & r < \delta \\ 0 & r > \delta \end{cases} \\ \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} &= 0 \quad 0 \leq r < \infty \end{aligned} \right\} z = 0 \quad (4.1)$$

在此情形下, 无  $L$  型解, 且表载展开式中的唯一非 0 项是

$$2kX_{10}^c(0) = L_1^c(0, k) = -q \frac{\delta J_1(\delta k)}{k} \quad (4.2)$$

对地表  $r = 0$  点处的本文结果及文[3]、[11]的结果给在表 2 中。可见三组结果彼此皆很接近。

表 1

	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$
$M = 01$	.23563191	.21535577	.22162881	.22234331	.22122203
$M = 02$	.22365603	.21996477	.22138636	.22113182	.22119863
$M = 03$	.21875357	.09034447	.22106243	.22089090	.22119260
$M = 04$	.22036220	.22179256	.22114121	.22121411	.22119576
$M = 05$	.22199097	.22206445	.22124345	.22110661	.22119611
$M = 06$	.22176504	.22072227	.22120532	.22118962	.22119544
$M = 07$	.22084435	.22082905	.22117969	.22120488	.22119565
$M = 08$	.22073656	.22165517	.22119537	.22119801	.22119589
$M = 09$	.22138816	.22143955	.22120115	.22119402	.22119571
$M = 10$	.22157756	.22076715	.22119437	.22119434	.22119555
$M = 11$	.22106895	.22100926	.22119404	.22119617	.22119562
$M = 12$	.22087955	.22155770	.22119715	.22116971	.22119574
$M = 13$	.22129114	.22134393	.22119571	.22119517	
$M = 14$	.22145293	.22091219	.22119435	.22119686	
$M = 15$	.22111889	.22107751	.22119648		
$M = 16$	.22099120	.22140847	.22119680		
$M = 17$	.22125753	.22128829			
$M = 18$	.22135387	.22103844			
$M = 19$	.22114848				
$M = 20$	.22107683				

有限序列以及对其应用强迫技术后的结果比较。第 1 列为原序列,后面几列为改进结果。可见  $N = 9$  时序列在  $M > 5$  后已有 6 位相同数字了。

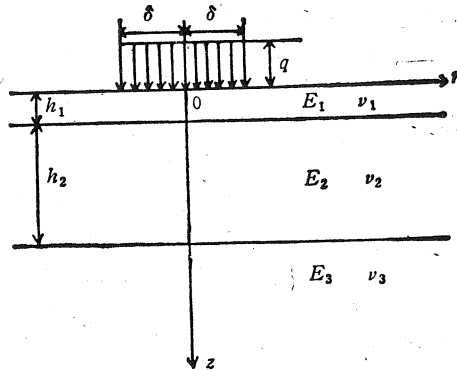


图 2 轴对称表载作用下的 3 层模型及其参数

$$E_1 = 1.0 \quad \nu_1 = 0.25 \quad E_2 = 0.2 \quad \nu_2 = 0.25 \quad E_3 = 0.1$$

$$\nu_3 = 0.35 \quad h_1 = 0.5\delta \quad q = 1.0 \quad h_2 = 2.0\delta \quad \delta = 1.0$$

2.24 层模型、亦轴对称表面载

层模型及参数见图 3。表载作用情形同图 2,且表载及其展开系数同(4.1)及(4.2)式(亦无 L 型解)。在地表  $r/\delta = 0.5$  处本文及文[2]的结果给在表 3。可见除  $\bar{u}_z$  分量外,其他值彼此很吻合。至于  $\bar{u}_z$ , 本文计算几次的结果皆为 13.8083。

表 2

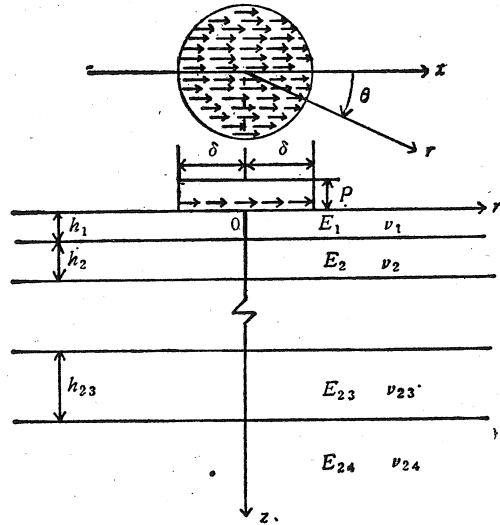
	$\bar{\sigma}_{rr}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{u}_z$
[11]	-1.833	-1.833	-1.	4.266
[3]	-1.834	-1.834	-1.	4.267
present paper	-1.8326	-1.8326	-1.	4.2662

3 层模型在轴对称表载作用下地面  $r = 0$  点处的无量纲位移及应力分量(只列出非 0 量)。

表 3

	$\bar{\sigma}_{rr}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{u}_r$	$\bar{u}_z$
[2]	-1.2062	-1.2165	-1.	-0.1662	14.36
present paper	-1.2043	-1.2147	-1.	-0.1659	13.8083

24 层模型在轴对称表载作用下地面  $r/\delta = 0.5$  处的无量纲位移及应力分量(只列出非 0 量)。



$$E_{i+1}/E_i = (i = 1, 2, \dots, 23)$$

$$0.9, 0.9, 0.9, 0.8, 0.8, 0.8, 0.7, 0.7, 0.7, 0.9, 0.9, 0.9,$$

$$0.8, 0.8, 0.8, 0.7, 0.7, 0.7, 0.5, 0.9, 0.9, 0.5, 0.8$$

$$h_i/\delta = (i = 1, 2, \dots, 23)$$

$$0.2, 0.3, 0.5, 0.4, 0.4, 0.4, 0.3, 0.3, 0.4, 0.3, 0.3, 0.4,$$

$$0.3, 0.3, 0.4, 0.3, 0.3, 0.4, 0.3, 0.3, 0.4, 0.5, 0.5$$

$$\nu_i = 0.25 (i = 1, 2, \dots, 23) \quad \nu_{24} = 0.35$$

图 3 非对称表载作用下的 24 层模型及其参数

### 3.24 层模型、非对称表面载

模型及参数见图 3。此情形下的表载为



$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta z} &= \begin{cases} -P \sin \theta & r < \delta \\ 0 & r > \delta \end{cases} \\ \sigma_{rz} &= \begin{cases} P \cos \theta & r < \delta \\ 0 & r > \delta \end{cases} \\ \sigma_{zz} &= 0 \quad 0 \leq r < \infty \end{aligned} \right\} z = 0$$

表载展开系数中的非0项为(有L型解)

$$2kY_{11}^c(0) = L_B^c(1, k) = \frac{P\delta J_1(\delta k)}{k}$$

$$kZ_{11}^c(0) = L_C^c(1, k) = \frac{P\delta J_1(\delta k)}{k}$$

在地表  $r/\delta = 0.5$  处本文及文[2]的结果给在表4中,这里,应力分量吻合较好,位移分量中的  $\bar{u}_r$  及  $\bar{u}_\theta$  彼此相差稍明显。

表 4

	$\bar{\sigma}_{rr}$	$\bar{\sigma}_{r\theta}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{rz}$	$\bar{\sigma}_{\theta z}$	$\bar{u}_r$	$\bar{u}_\theta$	$\bar{u}_z$
[2]	0.6827	-0.2816	0.1245	1	-1	-2.0346	2.0231	-0.1662
present paper	0.6827	-0.2816	0.1246	1	-1	-2.0732	2.0616	-0.1659

24层模型在非对称表载作用下地面  $r/\delta = 0.5$  处的无量纲位移及应力分量(只列出非0量)。

## 五、结 语

本文给出了多层弹性地基在一般表载及体力作用下的静态解。柱谱向量函数系的引入及传播矩阵法的应用使得解的形式简洁且便于数字计算。数值积分时应用了一强迫技术以加快由此所得的缓慢收敛序列的收敛速度。对对称及非对称表载的三个算例既对文中所列公式给予了验证,又显示出柱谱向量函数系、传播矩阵法及强迫技术的联合使用是非常有效的。因而可将其用于分析实际工程问题,特别是体力非0问题及粘弹性响应问题。

**致谢:** 本文的完成得到了我所汪雍熙高级工程师的鼓励和支持;全部计算费由水库地震组支助。北京大学王仁教授审阅过初稿并提出了宝贵意见;丁中一副教授作过指点。

## 参 考 文 献

- [1] 潘尔年,层状地基对表载及体力的响应,水利水电科学研究院科学论文集,30(1988).
- [2] 王凯,N层弹性连续体系在双圆均布复合荷载作用下的力学计算,固体力学学报,1(1983),136—153.
- [3] 郭文复,多层半无限弹性体在圆形荷载作用下的解析解,力学学报,16,3(1984),282—289.
- [4] 王林生,求解成层地空间轴对称问题的初参数法,力学学报,18,6(1986),528—537.
- [5] 岳中琦、王仁,多层横观各向同性弹性体静力学问题的解,北京大学学报(自然科学版),2(1988).
- [6] Улитко, А. Ф., Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости, Киев «Наукова Думка» (1979), с. 264.

- [7] Aki, K. & Richards, P. G., 1980, *Quantitative Seismology, Theory and Methods*, W. H. Freeman and Co., San Francisco Vol. 1&2 (1980).
- [8] 潘尔年、丁中一、王仁, 成层地球模型对体势力及表载的响应, 北京大学学报(自然科学版), 4(1986), 66—80.
- [9] Lowan, A. N., Davids, N. and Levenson, A., Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula, *Bull. Am. Math. Soc.*, 48 (1942), 739—743.
- [10] Wynn, P., On a procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 52 (1956), 663—671.
- [11] 同济大学公路工程研究所, 路面厚度计算图表, 人民交通出版社, 北京(1975).

## THE STATIC RESPONSES OF MULTILAYERED FOUNDATIONS TO GENERAL SURFACE LOADING AND BODY FORCE

Pan Ernian

(*Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power Research*)

**Abstract** Based on the author's recent work<sup>[1]</sup>, a detailed discussion has been given in this paper on the static responses of multilayered elastic foundations to general surface loading and body force. The formulae for calculating the displacement and stress components in this general case are deduced by the combined use of a system of special vector functions and the propagator matrix method. Numerical calculations for three examples with different number of layers and different distributions of surface loading are given. A procrustean technique is introduced to speed the convergence of the slowly convergent sequence obtained from numerical quadrature.

From the formulae given or their programmed counterparts and numerical calculation, it is apparent that the combined use of the system of special vector functions, the propagator matrix method and the procrustean technique is not only general, but also simple and easy to apply in practice. Thus, it is convenient and efficient to use this combined method to analyze this type of engineering problems, it is especially, applicable to the case of viscoelastic responses of multilayered foundations.

**Key words** multilayered foundations, special vector functions, propagator matrix method, procrustean technique