

横观各向同性层状半空间中的弹性位错

潘 尔 年

(水利水电科学研究院,北京)

摘 要

本文在柱向量函数系下,利用传播矩阵法求解了层状横观各向同性半空间由内部点源位错引起的变形;对六个基本点源位错,以等价体力法推出了横观各向同性情形下的点源函数,并且给出了内部任意剪切位错源引起的地表位移的积分表达式。为研究地球的层状结构,特别是其上部的横观各向同性对地表的地震位移、应变以及倾斜场的影响提供了计算公式。

关键词 横观各向同性,层状半空间,弹性位错,传播矩阵法。

一、引 言

文献[1]利用 Green 函数方法首先研究了半无限空间中的弹性位错问题,并且推导出求解此问题所必须的六个 Green 函数(分别对应六个基本点源位错)中的一个。文献[2]在[1]的基础上,对无限及半无限空间中的弹性位错问题在理论上给予了更一般的讨论,并且给出了六个 Green 函数中的剩下五个。为模拟地球的垂向非均匀性,文献[3]利用柱向量函数系以及传播矩阵法解析地推导出了由内部六个基本点源位错引起的层状各向同性半无限空间的地表位移。文献[4]和[5]则提出了一种计算文献[3]中位移表达式的数字方法,并且利用此数字方法对不同的层状地球模型作过地表位移、应变及倾斜的计算。另外,文献[4]及[5]还对点源解的适用范围及其对有关地球物理学问题研究的意义给予了较详细的讨论。

另一方面,我们知道,地球上部 24.4—220 km 内可认为是横观各向同性的^[6]。因此,为更好地研究地球模型及地球的静态响应,则必须引入地球内部弹性常数的横观各向同性。文献[7]利用传播矩阵法及 Love 应变势法,在轴对称变形假定下求解了层状横观各向同性半空间在表载作用下的静态响应。很明显,由于基本点源位错的非轴对称性,此解无法用来研究这类问题。文献[8]则用直接的双重 Fourier 变换法,对层状横观各向同性半空间问题给予了较一般的讨论。但由于辅助变量的引入以及传播矩阵的元素为复数型,给对实际问题的计算带来了一定的困难,而且文献[8]的结果也不便直接用于处理某些特殊类型的表载问题^[9],特别不宜用来求解六个基本点源位错引起的位移场。最近,笔者在两组向量函数系下,利用传播矩阵法对层状横观各向同性半空间问题给予了一个统一的解答^[10],所得结果包括了以前学者的一些解,如对二维及轴对称变形问题的解以及在

各向同性假定下的解。

本文利用文献[10]中在柱向量函数系下的结果,并采用类似于文献[3]的方法,求解了层状横观各向同性半空间由内部点源位错引起的变形;并且对六个基本点源位错,利用文献[11]中的等价体力表达式,推导出横观各向同性情形下的点源函数在柱向量函数系下的展开式。对地震学上感兴趣的任意剪切位错源,给出了可直接用于数字计算的地表位移积分表达式。

二、基本解

在本节,我们将利用文献[10]中柱向量函数系下的通解及传播矩阵,推导求解层状横观各向同性半空间中内源问题所必须的公式。

如图 1 所示,假定此弹性系统由 p 个平行的、横观各向同性的均匀层组成。最下一层为均匀半空间。柱坐标系 (r, θ, z) 的原点位于地表面,并且取 z 轴为横观各向同性的对称轴。第 k 层的上下界面分别位于 $z = z_{k-1}$ 和 $z = z_k$ 处。点位错源位于第 s 层中。另外,假定层间的连续性条件为固结。

当无体力存在时,在柱坐标系下任意层 k 皆满足平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{r\partial\theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{r\partial\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{r\partial\theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

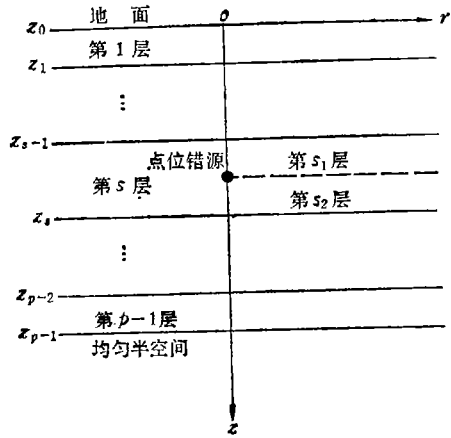


图 1 p 层半空间示意图
点源位于第 s 层中,它在柱坐标系下的坐标为 $(0, 0, z_s)$; 第 p 层为均匀半空间。

这里, σ_{rr} 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 等为应力分量,它们与应变分量 e_{rr} 、 $e_{\theta\theta}$ 等由下面的广义 Hooke 定律线性相联^[12]:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A_{11}e_{rr} + A_{12}e_{\theta\theta} + A_{13}e_{zz}, & \sigma_{\theta z} = 2A_{44}e_{\theta z}, \\ \sigma_{\theta\theta} = A_{12}e_{rr} + A_{11}e_{\theta\theta} + A_{13}e_{zz}, & \sigma_{rz} = 2A_{44}e_{rz}, \\ \sigma_{zz} = A_{13}e_{rr} + A_{13}e_{\theta\theta} + A_{33}e_{zz}, & \sigma_{r\theta} = 2A_{66}e_{r\theta}. \end{cases} \quad (2)$$

这里, $A_{66} = (A_{11} - A_{12})/2$; A_{11} 、 A_{12} 、 A_{13} 、 A_{33} 和 A_{44} 为第 k 层中的 5 个弹性常数。

(2)式中的应变分量 e_{rr} 、 $e_{\theta\theta}$ 等与位移分量 (u_r, u_θ, u_z) 又可通过众所周知的几何关系联系起来,即

$$\begin{cases} e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, & 2e_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \\ e_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, & 2e_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r\partial\theta}, \\ e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, & 2e_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \end{cases} \quad (3)$$

上述方程(1)–(3)即构成求解的三个基本方程。针对本文将要讨论的基本位错源,我们将以下面的柱向量函数系为基来求解^[13]:

$$\begin{cases} \mathbf{L}(r, \theta; \lambda, m) = \mathbf{i}_z S(r, \theta; \lambda, m), \\ \mathbf{M}(r, \theta; \lambda, m) = \text{grad } S = \mathbf{i}_r \frac{\partial S}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial S}{r\partial\theta}, \\ \mathbf{N}(r, \theta; \lambda, m) = \text{curl } (\mathbf{i}_z S) = \mathbf{i}_r \frac{\partial S}{r\partial\theta} - \mathbf{i}_\theta \frac{\partial S}{\partial r}. \end{cases} \quad (4)$$

这里, $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z)$ 为柱坐标系下的 (r, θ, z) 向单位矢量; 标量函数

$$S(r, \theta; \lambda, m) = J_m(\lambda r) e^{im\theta} / \sqrt{2\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

满足 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \lambda^2 S = 0. \quad (6)$$

方程(5)中, $J_m(\lambda r)$ 为 m 阶 Bessel 函数。

由于向量函数系(4)的正交性, 满足一定连续性条件的向量函数皆可在此系下展开。特别, 我们可将第 k 层中的未知位移及“面”应力向量作此展开, 即

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = \sum_m \int_0^{+\infty} [U_L(z)\mathbf{L}(r, \theta) + U_M(z)\mathbf{M}(r, \theta) + U_N(z)\mathbf{N}(r, \theta)] \lambda d\lambda, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(r, \theta, z) &\equiv \sigma_{rz}\mathbf{i}_r + \sigma_{\theta z}\mathbf{i}_\theta + \sigma_{zz}\mathbf{i}_z \\ &= \sum_m \int_0^{+\infty} [T_L(z)\mathbf{L}(r, \theta) + T_M(z)\mathbf{M}(r, \theta) + T_N(z)\mathbf{N}(r, \theta)] \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

上二式中, 为简化起见, 向量函数系关于参变量 λ, m 的依赖性已略写; 展开系数 U_L, U_M, U_N, T_L, T_M 及 T_N 为待定函数。将(7)和(8)式代入基本方程(1)–(3), 并通过一些运算后不难发现^[10], 它们满足下面两组一阶微分方程

$$\begin{pmatrix} U'_L \\ U'_M \\ T'_L \\ T'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 A_{13}/A_{33} & 1/A_{33} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1/A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)/A_{33} & -A_{13}/A_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_L \\ U_M \\ T_L \\ T_M \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} U'_N \\ T'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/A_{44} \\ \lambda^2 A_{65} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_N \\ T_N \end{pmatrix}. \quad (10)$$

其中, “ $'$ ”表示对 z 的导数, 即 d/dz 。

文献[10]中已给出上述两方程组的通解, 它们可分别表示为

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{Z}(z)\mathbf{C}, \quad (11)$$

$$\mathbf{E}^L(z) = \mathbf{Z}^L(z)\mathbf{C}^L. \quad (12)$$

这里, 方阵函数 $\mathbf{Z}(z)_{4 \times 4}$ 及 $\mathbf{Z}^L(z)_{2 \times 2}$ 即为通解矩阵. 为本文的应用, 我们已将其元素作了一些变动, 并给在附录 A 中; 列矩阵函数 $\mathbf{E}(z)$ 和 $\mathbf{E}^L(z)$ 的定义分别为

$$\mathbf{E}(z) = (U_L(z), \lambda U_M(z), T_L(z)/\lambda, T_M(z))^T,$$

$$\mathbf{E}^L(z) = (U_N(z), T_N(z)/\lambda)^T;$$

常列矩阵 \mathbf{C} 和 \mathbf{C}^L 的定义分别为

$$\mathbf{C} = (A, B, C, D)^T,$$

$$\mathbf{C}^L = (A^L, B^L)^T.$$

其中, A, B, C, D, A^L 和 B^L 为参变量 λ, m 的任意函数.

从(11)和(12)式推导出的层间传播关系为^[10]

$$\mathbf{E}_{k-1}(z_{k-1}) = \mathbf{a}_k \mathbf{E}_k(z_k), \quad (13)$$

$$\mathbf{E}_{k-1}^L(z_{k-1}) = \mathbf{a}_k^L \mathbf{E}_k^L(z_k). \quad (14)$$

这里, 下标 k 指明此量属于第 k 层; \mathbf{a}_k 和 \mathbf{a}_k^L 为传播矩阵, 其元素可见文[10]中的第 3 节及附录 B.

若假定在 $z = z_i$ 处, 基本位错源导致的位移及“面”应力向量展开系数的间断如下:

$$\mathbf{E}_{i2}(z_{i1}) - \mathbf{E}_{i1}(z_{i1}) = \mathbf{D}_m, \quad (15)$$

$$\mathbf{E}_{i2}^L(z_{i1}) - \mathbf{E}_{i1}^L(z_{i1}) = \mathbf{D}_m^L, \quad (16)$$

上二式中

$$\mathbf{D}_m = (\Delta U_L^m, \lambda \Delta U_M^m, \Delta T_L^m/\lambda, \Delta T_M^m)^T,$$

$$\mathbf{D}_m^L = (\Delta U_N^m, \Delta T_N^m/\lambda)^T.$$

这里, 我们已在展开系数的右上角附上 m 以表示这些量与 m 的依赖性(下同). 类似于文献[3], 利用地表应力自由边界条件、最下层无限半空间中解的有界条件以及层间的连续性条件, 则可推出基本位错源作用下介质内任意点处的位移及“面”应力向量的展开系数表达式, 特别可得到地表位移向量的展开系数

$$\begin{cases} U_L^m(0) = \frac{(G_{11}G_{43} - G_{13}G_{41})(H_m)_3 + (G_{13}G_{31} - G_{11}G_{33})(H_m)_4}{G_{31}G_{43} - G_{33}G_{41}} - (H_m)_1, \\ \lambda U_M^m(0) = \frac{(G_{21}G_{43} - G_{23}G_{41})(H_m)_3 + (G_{23}G_{31} - G_{21}G_{33})(H_m)_4}{G_{31}G_{43} - G_{33}G_{41}} - (H_m)_2, \\ U_N^m(0) = G_{11}^L(H_m)_2/G_{21}^L - (H_m)_1. \end{cases} \quad (17)$$

上三式中

$$\mathbf{G} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{p-1} \mathbf{Z}_p(z_{p-1}),$$

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{p-1} \mathbf{a}_{p1} \mathbf{D}_m,$$

$$\mathbf{G}^L = \mathbf{a}_1^L \mathbf{a}_2^L \cdots \mathbf{a}_{p-1}^L \mathbf{Z}_p^L(z_{p-1}),$$

$$\mathbf{H}_m^L = \mathbf{a}_1^L \mathbf{a}_2^L \cdots \mathbf{a}_{p-1}^L \mathbf{a}_{p1}^L \mathbf{D}_m^L.$$

因此, 一旦确定了基本位错源的间断量 \mathbf{D}_m 及 \mathbf{D}_m^L , 我们便可将(17)式代入(7)式以获得这些基本源引起的地表位移场(当然也可求得介质内任意点处的位移及应力分量^[10]). 所以, 我们将转向对基本位错源函数的推导.

三、点源位错函数

如上所述,要确定某一点源位错引起的静态位移、应力场,则必须首先确定此源在柱向量函数系(4)式下的位移及“面”应力向量展开系数(见(15)及(16)式)。然而,这是一个相当复杂的问题。文献[14]曾用 Hansen 展开法,从无限空间中的点源解获得过在弹性各向同性条件下点源位错在柱向量函数系下的表达式。文献[15]则只列出了在横观各向同性情形下点源位错在柱向量函数系下的结果,声称太复杂而没有给出具体推导。这里,我们将利用等价体力这一概念^[14,16],比较简单地来推导横观各向同性介质中点源位错函数在柱向量函数系下的展开式。不难看出,此法极易推广到一般情形,用来推导更一般的、各向异性弹性介质内点源位错在柱、球向量函数系及笛卡尔向量函数系下的展开式。

从文献[11]可知,对弹性静力学问题,在曲面 Σ 上的任意位移不连续的体力等价

$$f_p^{[u]}(\eta) = - \iint_{\Sigma} [u_i(\xi)] c_{ijpq} v_j \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\eta - \xi) d\Sigma(\xi). \quad (18)$$

这里, v_j 为曲面 Σ 上点 ξ 处的外法向分量; c_{ijpq} 为广义 Hooke 定律中的弹性常数; $[u_i(\xi)]$ 表示位移在 ξ 点处通过曲面 Σ 的间断量。

如果假定位错为位于点 (r_0, θ_0, z_0) 处的点源型,且 i 方向的位错由 $[u_i] = \Delta u_i$ 给出,则在柱坐标系下,上式变为

$$f_p^{[u]}(r, \theta, z) = - \Delta u_i \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} n_i v_j c_{ijpq} \frac{\partial}{\partial \eta_q} \left[\frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0) \right]. \quad (19)$$

将此等价体力在柱向量函数系(4)下展开,则有

$$f^{[u]}(r, \theta, z) = \sum_m \int_0^{+\infty} [F_L(\lambda, m) \mathbf{L}(r, \theta) + F_M(\lambda, m) \mathbf{M}(r, \theta) + F_N(\lambda, m) \mathbf{N}(r, \theta)] \lambda d\lambda. \quad (20)$$

其中,展开系数为

$$\begin{cases} F_L(\lambda, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f^{[u]} \cdot \mathbf{L}^*(r, \theta) r dr d\theta, \\ F_M(\lambda, m) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f^{[u]} \cdot \mathbf{M}^*(r, \theta) r dr d\theta, \\ F_N(\lambda, m) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f^{[u]} \cdot \mathbf{N}^*(r, \theta) r dr d\theta. \end{cases} \quad (21)$$

(21)式中,“*”表示取共轭。利用 δ 函数的性质,上式可变化成

$$\begin{cases} F_L(\lambda, m) = F_L^{\delta} \delta(z - z_0) + F_L^{\delta'} \delta'(z - z_0), \\ F_M(\lambda, m) = F_M^{\delta} \delta(z - z_0) + F_M^{\delta'} \delta'(z - z_0), \\ F_N(\lambda, m) = F_N^{\delta} \delta(z - z_0) + F_N^{\delta'} \delta'(z - z_0). \end{cases} \quad (22)$$

其中,系数 F_L^{δ} 、 F_M^{δ} 、 F_N^{δ} 、 $F_L^{\delta'}$ 、 $F_M^{\delta'}$ 及 $F_N^{\delta'}$ 的表达式见附录 B。

为获得点源位错导致的间断量 \mathbf{D}_m 和 \mathbf{D}_m^c , 我们还需将上节中得到的一阶微分方程组(9)和(10)式推广到非齐次型,即在等价体力(20)式作用下的对应形式。不难证明,它

们为

$$\begin{pmatrix} U'_L \\ U'_M \\ T'_L \\ T'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 A_{13}/A_{33} & 1/A_{33} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1/A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)/A_{33} & -A_{13}/A_{33} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_L \\ U_M \\ T_L \\ T_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_L \\ -F_M \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} U'_N \\ T'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/A_{44} \\ \lambda^2 A_{66} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_N \\ T_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_N \end{pmatrix}. \quad (24)$$

很明显,由等价体力的展开系数(22)式右边第一项导致的在 $z = z_0$ 处的间断为

$$\begin{cases} \Delta T'_L = -F'_L, & \Delta U'_L = 0, \\ \Delta T'_M = -F'_M, & \Delta U'_M = 0, \\ \Delta T'_N = -F'_N, & \Delta U'_N = 0. \end{cases} \quad (25)$$

而由(22)式右边第二项导致的在 $z = z_0$ 处的间断,在利用文献[17]中的特解表达式及传播矩阵的一些性质后^[18],可推得

$$\begin{cases} \Delta T''_L = -\lambda^2 F''_M, & \Delta U''_L = \frac{-1}{A_{33}} F''_L, \\ \Delta T''_M = \frac{A_{13}}{A_{33}} F''_L, & \Delta U''_M = \frac{-1}{A_{44}} F''_M, \\ \Delta T''_N = 0, & \Delta U''_N = \frac{-1}{A_{44}} F''_N. \end{cases} \quad (26)$$

因此,将(25)与(26)式相加,则得到由点源位错导致的间断量 \mathbf{D}_m 和 \mathbf{D}^L_m , 它们的分量为

$$\begin{cases} \Delta U''_L = \frac{-1}{A_{33}} F''_L, & \Delta T''_M = -F''_M + \frac{A_{13}}{A_{33}} F''_L, \\ \lambda \Delta U''_M = \frac{-\lambda}{A_{44}} F''_M, & \Delta U''_N = \frac{-1}{A_{44}} F''_N, \\ \Delta T''_L/\lambda = -\frac{F''_L}{\lambda} - \lambda F''_M, & \Delta T''_N/\lambda = -\frac{F''_N}{\lambda}. \end{cases} \quad (27)$$

将横观各向同性情形下的弹性常数 c_{ijpq} 代入附录 B 中 $F''_L, F''_M, F''_N, F''_L, F''_M$ 及 F''_N 的表达式,并在 $r_0 = \theta_0 = 0$ 处计算这些系数,最后便可获得间断量 \mathbf{D}_m 及 \mathbf{D}^L_m 的表达式(略写因子 $\Delta U d \Sigma / \sqrt{2\pi}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_L^0 = \frac{A_{13}}{A_{33}} (n_x v_x + n_y v_y) + n_z v_z, \\ \lambda \Delta U_M^{\pm 1} = \frac{1}{2} [\pm (n_x v_x + n_z v_x) - i(n_y v_x + n_z v_y)], \\ \Delta U_N^{\pm 1} = \frac{1}{2\lambda} [-i(n_x v_x + n_z v_x) \mp (n_y v_x + n_z v_y)], \\ \Delta T_M^0 = \left[\frac{1}{2} (A_{11} + A_{12}) - \frac{A_{13}^2}{A_{33}} \right] (n_x v_x + n_y v_y), \\ \Delta T_M^{\pm 1} = \frac{A_{66}}{2} [(n_y v_y - n_x v_x) \pm i(n_x v_y + n_y v_x)], \\ \Delta T_N^{\pm 1} / \lambda = \frac{A_{66}}{2\lambda} [(n_x v_y + n_y v_x) \pm i(n_x v_x - n_y v_y)]. \end{array} \right. \quad (28)$$

对(28)式以外的 m 值, 所给出的间断为 0; 另外, 我们在推导上述结果时, 已选取了固定坐标系 (x, y, z) , 其中 x 沿 $\theta = 0$ 方向, y 沿 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 方向.

(28)式给出了基本点源位错引起的间断量. 注意到本文与文献[15]中柱向量函数系的选择区别以及弹性常数间的关系, 本文结果与文献[15]中所列结果是完全一致的. 当退化为各向同性时, 本文结果的 $m > 0$ 部分为文献[3]中的对应结果的 1/2 倍, 这是由文献[3]中只取柱向量函数系的 $m \geq 0$ 部分所引起的差别. 但用本文间断量和用文献[3]中的间断量所得到的位移分量的最终表达式是一致的(见下节).

四、任意剪切位错源引起的地表位移

我们知道, 地震学上最感兴趣的是剪切位错. 如图 2 所示, ν 为断层面法向, n 为断层滑移方向; β 为倾伏角, δ 为倾角. 对走向沿 x 轴向上的任意剪切位错源, 有并矢

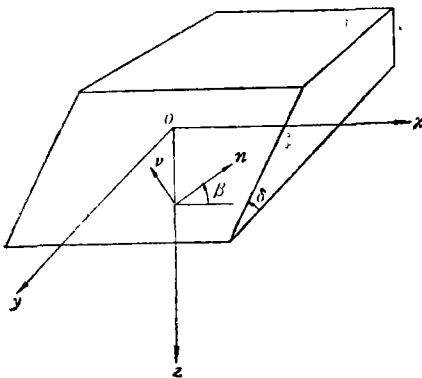


图 2 在笛卡尔坐标系 (x, y, z) 下的断层及其剪切位错参数

$$\begin{aligned} n\nu = & \cos \beta (\sin \delta \mathbf{i}_y - \cos \delta \mathbf{i}_z) \\ & + \sin \beta \left[\cos 2\delta \mathbf{i}_x \right. \\ & \left. - \frac{\sin 2\delta}{2} (\mathbf{i}_y \mathbf{i}_y - \mathbf{i}_z \mathbf{i}_z) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

从基本位错型的定义^[1]可知, (29)表示的任意剪切位错源引起的位移场可表为下述几个基本位错型引起的位移场的线性组合, 即

$$\begin{aligned} u_i = & \cos \beta (u_i^1 \sin \delta - u_i^2 \cos \delta) \\ & + \sin \beta (u_i^3 \cos 2\delta - u_i^4 \sin 2\delta), \\ & i = r, \theta, z. \end{aligned} \quad (30)$$

这里, u_i^j 表示由 (1, 2) 型位错源, 或者垂直走滑源 ($\beta = 0^\circ, \delta = 90^\circ$) 引起的位移场;

u_r^2 表示由(2,3)型位错源,或者垂直倾滑源($\beta = 90^\circ, \delta = 90^\circ$)引起的位移场; u_θ^2 表示由组合位错源 $\frac{1}{2} [(2,2)-(3,3)]$, 或者 45° 倾滑源 ($\beta = 90^\circ, \delta = 45^\circ$) 引起的位移场; u_z^2 表示由(1,3)型位错源引起的位移场,可在 u_r^1 之表达式中由 $\theta - \frac{\pi}{2}$ 代替 θ 而得到。另外,将本文(30)式与文[4]的(1)式比较可见,两者的 $\sin \beta$ 系数有一符号差别,这是由对 β 角的定义不同引起的。

因此,为获得走向沿 x 轴向的任意剪切位错源引起的位移场,我们实际上只需计算由(1,2)型、(2,3)型及组合型 $\frac{1}{2} [(2,2)-(3,3)]$ 引起的位移场 u_r^1, u_θ^1 及 u_z^1 。利用源函数间断量(28)、地表位移展开系数(17)及位移表达式(7),在进行一些基本运算后,可最终获得计算这几个基本位移场的积分表达式,它们分别是

1. 对(1,2)型

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left[(U_M^1(0)/i) \frac{\partial}{\partial r} J_2(\lambda r) \right. \\ \quad \left. + 2U_N^1(0)J_2(\lambda r)/r \right] \lambda d\lambda \sin 2\theta, \\ u_\theta^1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left[(U_M^1(0)/i) 2J_2(\lambda r)/r \right. \\ \quad \left. + U_N^1(0) \frac{\partial}{\partial r} J_2(\lambda r) \right] \lambda d\lambda \cos 2\theta, \\ u_z^1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (U_L^1(0)/i) J_2(\lambda r) \lambda d\lambda \sin 2\theta; \end{array} \right. \quad (31)$$

2. 对(2,3)型

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left[(U_M^1(0)/i) \frac{\partial}{\partial r} J_1(\lambda r) \right. \\ \quad \left. + U_N^1(0)J_1(\lambda r)/r \right] \lambda d\lambda \sin \theta, \\ u_\theta^1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left[(U_M^1(0)/i) J_1(\lambda r)/r \right. \\ \quad \left. + U_N^1(0) \frac{\partial}{\partial r} J_1(\lambda r) \right] \lambda d\lambda \cos \theta, \\ u_z^1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (U_L^1(0)/i) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \sin \theta; \end{array} \right. \quad (32)$$

3. 对 $\frac{1}{2} [(2,2)-(3,3)]$ 型

$$\left\{ \begin{aligned} u_r^3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left\{ U_M^0(0) \frac{\partial}{\partial r} J_0(\lambda r) + \left[U_M^2(0) \frac{\partial}{\partial r} J_2(\lambda r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (U_N^2(0)/i) 2J_2(\lambda r)/r \right] \cos 2\theta \right\} \lambda d\lambda, \\ u_\theta^3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left[-U_M^2(0) 2J_2(\lambda r)/r \right. \\ &\quad \left. + (U_N^2(0)/i) \frac{\partial}{\partial r} J_2(\lambda r) \right] \lambda d\lambda \sin 2\theta, \\ u_z^3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} [U_L^0(0) J_0(\lambda r) + U_L^2(0) J_2(\lambda r) \cos 2\theta] \lambda d\lambda. \end{aligned} \right. \quad (33)$$

上述三式中,展开系数 $U_L^2(0)$ 、 $U_M^2(0)$ 等的表达式见附录 C.

五、结 语

本文利用文献[10]中的通解及传播矩阵,在柱向量函数系下求解了层状横观各向同性半空间由内部点源位错引起的变形;并对六个基本点源位错,以等价体力法推出了横观各向同性情形下的点源函数,它们包括了各向同性情形时的结果.

另外,本文还对地震学上感兴趣的任意剪切位错源,推导出了可直接用于数字计算的地表位移积分表达式,为将来以实例研究地球的层状结构,特别是其上部的横观各向同性对地表的地震位移、应变以及倾斜场的影响打下了基础.

感谢 本文的完成得到了抗震防护研究所水库地震组的资助;北京大学丁中一副教授阅读了初稿并提出了宝贵意见.

附 录 A

正文(11)式中的通解矩阵 $\mathbf{Z}(z)$ 的元素为

当 $x_1 \neq x_2$ 时

$$\begin{cases} Z_{11} = c(x_1)e^{-\lambda x_1 z}, & Z_{12} = c(x_1)e^{\lambda x_1 z}, \\ Z_{21} = -d(x_1)e^{-\lambda x_1 z}, & Z_{22} = d(x_1)e^{\lambda x_1 z}, \\ Z_{31} = -x_1^{-1}e^{-\lambda x_1 z}, & Z_{32} = x_1^{-1}e^{\lambda x_1 z}, \\ Z_{41} = e^{-\lambda x_1 z}, & Z_{42} = e^{\lambda x_1 z}. \end{cases} \quad (A1)$$

其中, x_1 和 x_2 为下面方程的特征根:

$$(A_{44}x^2 - A_{11})(A_{33}x^2 - A_{44}) + (A_{13} + A_{44})^2 x^2 = 0.$$

将 Z_{i1} 和 Z_{i2} 中的 x_1 由 x_2 代替,则分别获得 Z_{i3} 和 Z_{i4} ($i = 1, 2, 3, 4$). 在方程 (A1) 中

$$c(x) = (A_{11} + x^2 A_{13})/[x^2(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)], \quad (A2)$$

$$d(x) = (A_{13} + x^2 A_{33})/[x(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)]. \quad (A3)$$

当 $x_1 = x_2$ 时

$$\begin{cases} Z_{14} = (c'(x_1)/\lambda + c(x_1)z)e^{\lambda x_1 z}, \\ Z_{24} = (d'(x_1)/\lambda + d(x_1)z)e^{\lambda x_1 z}, \\ Z_{34} = (-x_1^{-2}/\lambda + x_1^{-1}z)e^{\lambda x_1 z}, \\ Z_{44} = ze^{\lambda x_1 z}. \end{cases} \quad (A4)$$

一方面, Z_{i1} 和 Z_{i2} 与 (A1) 式中给出的相同; 另一方面, 在 (A4) 中的 Z_{i4} 中由 $-x_1$ 代替 x_1 , 则获得 Z_{i3} ($i = 1, 2, 3, 4$). 在方程 (A4) 中, “ \prime ”表示求导, 即

$$c'(x_1) = dc(x_1)/dx_1, \quad d'(x_1) = dd(x_1)/dx_1.$$

正文(12)式中的通解矩阵 $Z^L(z)$ 的元素为

$$\begin{cases} Z_{11}^L = e^{-\lambda_1 z}, & Z_{12}^L = e^{\lambda_1 z}, \\ Z_{21}^L = -\bar{s}e^{-\lambda_1 z}, & Z_{22}^L = \bar{s}e^{\lambda_1 z}. \end{cases} \quad (\text{A5})$$

其中

$$s = \sqrt{A_{66}/A_{44}}, \quad \bar{s} = sA_{44} = \sqrt{A_{44}A_{66}}.$$

附 录 B

正文(22)式中的系数表达式为

$$F_L^{\theta} = \frac{\Delta u d \Sigma}{\sqrt{2\pi}} \left\{ n_i \nu_j \epsilon_{ijr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [J_m(\lambda r) r] e^{-im\theta} + \epsilon_{ijr\theta} \frac{1}{r} J_m(\lambda r) \frac{\partial}{\partial \theta} [n_i \nu_j e^{-im\theta}] \right\}_0 \quad (\text{B1})$$

$$F_M^{\theta} = \frac{\Delta u d \Sigma}{\lambda^2} \left\{ n_i \nu_j \epsilon_{ijrr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial S^*}{\partial r} \right] + \epsilon_{ijr\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[n_i \nu_j \frac{\partial S^*}{\partial r} \right] + n_i \nu_j \epsilon_{ij\theta r} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} S^* + \epsilon_{ij\theta\theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[n_i \nu_j \frac{\partial S^*}{\partial \theta} \right] \right\}_0, \quad (\text{B2})$$

$$F_N^{\theta} = \frac{\Delta u d \Sigma}{\lambda^2} \left\{ -n_i \nu_j \epsilon_{ij\theta r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial S^*}{\partial r} \right] - \epsilon_{ij\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[n_i \nu_j \frac{\partial S^*}{\partial r} \right] + n_i \nu_j \epsilon_{ijrr} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} S^* + \epsilon_{ijr\theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[n_i \nu_j \frac{\partial S^*}{\partial \theta} \right] \right\}_0, \quad (\text{B3})$$

$$F_L^d = \frac{-\Delta u d \Sigma}{\sqrt{2\pi}} \left\{ n_i \nu_j \epsilon_{ijrz} J_m(\lambda r) e^{-im\theta} \right\}_0. \quad (\text{B4})$$

$$F_M^d = \frac{-\Delta u d \Sigma}{\lambda^2} \left\{ n_i \nu_j \epsilon_{ijrz} \frac{\partial S^*}{\partial r} + n_i \nu_j \epsilon_{ij\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial S^*}{\partial \theta} \right\}_0, \quad (\text{B5})$$

$$F_N^d = \frac{-\Delta u d \Sigma}{\lambda^2} \left\{ n_i \nu_j \epsilon_{ijrz} \frac{1}{r} \frac{\partial S^*}{\partial \theta} - n_i \nu_j \epsilon_{ij\theta z} \frac{\partial S^*}{\partial r} \right\}_0. \quad (\text{B6})$$

在上述公式中, $\{ \}_0$ 即表示函数在点 (r_0, θ_0) 取值.

附 录 C

正文(31)–(33)式中的展开系数分别为

对(1,2)型

$$\begin{cases} U_L^z(0)/i = g A_{66} [(V_{34} X_1 + V_{44} X_2)/\Delta - V_{14}], \\ \lambda U_M^z(0)/i = g A_{66} [(V_{34} X_3 + V_{44} X_4)/\Delta - V_{24}], \\ U_N^z(0) = \frac{g A_{66}}{\lambda} (G_{11}^L V_{22}^L / G_{21}^L - V_{12}^L). \end{cases} \quad (\text{C1})$$

对(2,3)型

$$\begin{cases} U_L^1(0)/i = -g[(V_{32}X1 + V_{42}X2)/\Delta - V_{12}], \\ \lambda U_M^1(0)/i = -g[(V_{32}X3 + V_{42}X4)/\Delta - V_{22}], \\ U_N^1(0) = -\frac{g}{\lambda} (G_{11}^L V_{21}^L / G_{21}^L - V_{11}^L). \end{cases} \quad (C2)$$

对 $\frac{1}{2}[(2,2)-(3,3)]$ 型

$$\begin{cases} U_L^0(0) = [(H_0)_3 X1 + (H_0)_4 X2] / \Delta - (H_0)_1, \\ \lambda U_M^0(0) = [(H_0)_3 X3 + (H_0)_4 X4] / \Delta - (H_0)_2, \\ (H_0)_q = \frac{g}{2} \left\{ \left(\frac{A_{13}}{A_{33}} - 1 \right) V_{q1} + \left[\frac{1}{2} (A_{11} + A_{12}) - \frac{A_{13}^2}{A_{33}} \right] V_{q4} \right\}, \quad q = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (C3)$$

$$\begin{cases} U_L^2(0) = \frac{gA_{66}}{2} [(V_{34}X1 + V_{44}X2)/\Delta - V_{14}], \\ \lambda U_M^2(0) = \frac{gA_{66}}{2} [(V_{34}X3 + V_{44}X4)/\Delta - V_{24}], \\ U_N^2(0)/i = \frac{-gA_{66}}{2\lambda} (G_{11}^L V_{22}^L / G_{21}^L - V_{12}^L). \end{cases} \quad (C4)$$

上述公式中

$$\begin{aligned} g &= \Delta u d \Sigma / \sqrt{2\pi}, \\ X1 &= G_{11}G_{43} - G_{13}G_{41}, \quad X2 = G_{13}G_{31} - G_{11}G_{33}, \\ X3 &= G_{21}G_{43} - G_{23}G_{41}, \quad X4 = G_{23}G_{31} - G_{21}G_{33}, \\ \Delta &= G_{31}G_{43} - G_{33}G_{41}, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{a}_{i+1}, \\ \mathbf{V}^L &= \mathbf{a}_1^L \mathbf{a}_2^L \cdots \mathbf{a}_{i-1}^L \mathbf{a}_{i+1}^L. \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] Steketee, J. A., On Volterra's dislocation in a semi-infinite elastic medium, *Can. J. Phys.*, **36**, 192—205, 1958.
- [2] Maruyama, T., Statical elastic dislocations in an infinite and semi-infinite medium, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **42**, 289—368, 1964.
- [3] Singh, S. J., Static deformation of a multilayered half-space by internal sources, *J. Geophys. Res.*, **75**, 3257—3263, 1970.
- [4] Jovanovich, D., Hussein, M. I. & Chinnery, M. A., Elastic dislocations in a layered half-space—I. Basic theory and numerical methods, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **39**, 205—217, 1974.
- [5] Jovanovich, D., Hussein, M. I. & Chinnery, M. A., Elastic dislocations in a layered half-space—II. The point source, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **39**, 219—239, 1974.
- [6] Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L., Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **25**, 297—356, 1981.
- [7] Singh, S. J., Static deformation of a transversely isotropic multilayered half-space by surface loads, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **42**, 263—273, 1986.
- [8] 岳中琦和王仁, 多层横观各向同性弹性体静力学问题的解, 北京大学学报(自然科学版), **24**, 202—211, 1988.
- [9] Wang Kai, Analysis and calculation of stresses and displacements in layered elastic systems, *Acta Mech. Sinica*, **3**, 251—260, 1987.
- [10] Pan Ernian, Static response of a transversely isotropic and layered half-space to general surface loads, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **54**, 353—363, 1989.
- [11] Aki, K. & Richards, P. G., *Quantitative Seismology Theory and Methods*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 932, 1980.
- [12] Lekhnitskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. Holden-Day, San Francisco, 404, 1963.

- [13] Улитко, А. Ф., Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости, Нуакова Думка, Киев, 264, 1979.
- [14] Ben-Menahem, A. & Singh, S. J., Multipolar elastic fields in a layered half-space. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 1519—1572, 1968.
- [15] Takeuchi, H. & Saito, M., Seismic surface waves, In *Methods in Computational Physics*, 217—295, Acad. Press, New York, 1972.
- [16] Burridge, R. & Knopoff, L., Body force equivalents for seismic dislocations, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **54**, 1875—1888, 1964.
- [17] Gilbert, F. & Backus, G., Propagator matrices in elastic wave and vibration problems, *Geophys.*, **31**, 326—332, 1966.
- [18] Sabadini, R., Yuen, D. & Boschi, E., The effects of post-seismic motions on the moment of inertia of a stratified viscoelastic earth with an asthenosphere, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **79**, 727—745, 1984.

ELASTIC DISLOCATIONS IN A TRANSVERSELY ISOTROPIC AND LAYERED HALF-SPACE

PAN ER-NIAN

(*Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power Research, Beijing*)

Abstract

The propagator matrix method is used in the system of cylindrical vector functions to solve the problem of the static deformation of a transversely isotropic and layered half-space by internal point dislocation sources. The source functions in transversely isotropic medium are obtained for the six elementary displacement dislocations by the use of body force equivalents. The explicit integrand expressions for surface displacements are given for an arbitrary shear dislocation source within the layered medium, which can be calculated to investigate the effects of earth layering, and especially transverse isotropy on earthquake displacement, strain and tilt fields.

Key words Transverse isotropy, Layered half-space, Elastic dislocation, Propagator matrix method.